

DELHI  
UNIVERSITY  
LIBRARY.

u  
Class. No 51.1.

Book No

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B44

168N21

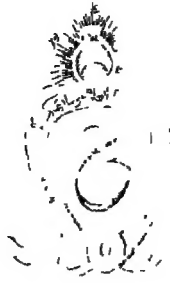
Date of release for loan

Ac. No. 2343

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.







بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## ترسیات

مسادات درجہ دوم کا جبرہ اور ترسیمی حل  
عثمانیہ ٹیکریولیشن کی جامعہ کے لئے

مؤلفہ

قاضی حسین صاحب ایم۔ اے  
پروفیسر ریاضیات عثمانیہ یونیورسٹی کالج حیدر آباد دکن

۱۳۳۹ھ ۱۳۳۸ھ ۱۹۲۱ء

مطبوعہ دارالکتاب دارالعلوم دیوبند



# دیباجہ

حسب ہدایات ذیلی کمیٹی ریاضیات یہ چھوٹی سی کتاب ”ترسیمات اور مساوات درجہ دوم کے نظری اور ترسیمی حل“ غنائیہ میٹریکولیشن کمیٹی جماعتوں کے لئے منظورہ نصاب کے مطابق لکھی گئی ہے نصاب مذکور کی حدود کے اندر جتنی ممکن تھا کتاب کو ترتیب اور مضمون کے لحاظ سے مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے اور اس امر کو ہمیشہ ملحوظ رکھا گیا ہے کہ مطالب کو صاف، سادہ اور آسان عبارت میں پیش کیا جائے۔

ہر موقع پر مضمون کی توضیح کے لئے حل کردہ اور مشقی مثالوں کی کافی تعداد موجود ہے، تاہم طالب علم کو چاہئے کہ ہر قسم کے اعداد و شمار کو جن میں وہ خاص دلچسپی رکھتا ہو ترکیبی طریق پر تعبیر کرنے کی کوشش کرے اور اس طرح مناسب، طبع زاد مثالوں کا ذخیرہ اپنے لئے خود پیدا کرے۔

مثلاً کرکٹ یا دوسری کھیلوں میں اپنی دوڑوں اور بازوؤں کے گراف بنانے سے اپنے امتحانوں کے حاصل کردہ نشانات کو مرسم کرنے سے، میل میں اپنے تجربات کے مقدمات کی بنا، پر ترسیمیں بنانے اور پیش پیا اور بار پیا کے چڑھنے اترنے کو مرسم کرنے سے کئی دلچسپ مثالیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ ذرا اردو اور انگریزی اخباروں میں کئی ایسے اعداد و شمار ملتے ہیں جن کی بنا پر ترسیمیں بنانا دلچسپی سے خالی نہیں ہوتا اس کے علاوہ بہت سی کتابیں ہیں مثلاً ”ٹیکر ایماٹک“ ”سٹیٹس مینا میربک“ ”بستان آصفیہ“ وغیرہ جن میں ایسے اعداد و شمار کا ذخیرہ موجود ہے جو ترکیبی طریقوں

کے لئے نہایت سوزوں ہیں۔ میں اس امر کو پوشیدہ نہیں رکھنا چاہتا کہ اس کتاب کی تیاری میں مجھے بجد محنت اور تکلیف اٹھانی پڑی، لہٰذا گراف کے ذریعہ تصاویر اور خاص طور پر گراف کاغذ کے خانے، نقطے، خط اور مخنی صحیح طور پر مرسم کرنا محض ناممکن ہے، سستی میٹر کاغذ کا استعمال تو خارج از بحث تھا میں نے سوالات کے حل کرنے میں انہوں والے کاغذ کو استعمال کرنے کی کوشش کی ہے، وہ بھی کس کامیابی سے اس کا اندازہ گراف کاغذ کے خانوں، نقطوں اور مخنیات کو دیکھنے سے ہو سکتا ہے، اس لئے میں ان شکلوں کو بطور نمونہ کے پیش نہیں کرنا چاہتا اگرچہ انہی شکلوں کے نقطہ بنقطہ بنانے اور کھینچنے میں اور انہی شکلوں کے متعلق کتابوں اور سنگ سازوں کو بار بار ہدایات دینے میں بقدر وقت صرف ہوا ہے وہ اصل کتاب کے لکھنے میں صرف نہیں ہوا۔ مالک محروسہ سرکار عالی کے متعلق جملہ اعداد و شمار بتان اصفیہ سے لئے گئے ہیں، میں اس جگہ اس مفید کتاب کے مؤلف کا خاص طور پر شکریہ ادا کرتا ہوں۔

تربیات ہندسہ تحلیلی کی اور اس لحاظ سے ریاضی جدید کی ابتدا میں دو متغیروں کے باہمی انحصار کو یعنی تفاعل کے مفہوم کو واضح طور پر ایک شکل میں بندی کو دکھانے کے لئے ترسیم خاص اہمیت رکھتی ہے اسکی ضرورت ہر جگہ مسلمہ ہے اور اس کا احاطہ استعمال ابتدائی اور اعلیٰ ریاضی سائنس اور انجینئرنگ میں ہی نہیں بلکہ اور غیر متعلقہ مضامین معاشیات، سیاسیات وغیرہ وغیرہ میں روزانہ بڑھتا جا رہا ہے، آئے دن اپنے کاروبار میں تاجر لوگ اسے بلا تکلف ان چیزوں کے متعلق جو ان کے کسی گودام میں موجود نہیں ہوتیں ایسی ایسی ہی ہر ستیں مرتب کرنے میں استعمال کرتے ہیں جن میں ہر ایک شے اور اس کے ہر ایک ناپ اور پیمانہ کی قیمت بڑی صحت سے مندرج ہوتی ہے، ہسپتالوں کے ہر کمرہ میں ”گراف پیپر“ ہر مریض کے سر جانے موجود ہیں جن میں اس کی ہفتوں اور مہینوں

کی ٹیپریج ٹریم کو فقط ایک نظر دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہے۔  
 امید کی جاتی ہے کہ عثمانیہ مشرکیولیشن کے طالب علم اس  
 چھوٹی سی کتاب کے مطالعہ سے فائدہ اٹھائیں گے اور کالج کی جماعتوں  
 میں آنے سے قبل تریات کے چند سادہ اصولوں سے واقف ہو گئے۔

قاضی محمد حسین

۱۴۱۳ھ و ۱۳۳۱ء





# فہرست مضامین

نمبر شمار	مضمون	صفحہ
۱	باب اول	
۲	مثبت اور منفی فاصلے	۱
۳	ایک خط پر کے کسی نقطہ کا تعین	۸
۴	سطح مستوی پر کے نقاط کی تعین	۱۵
۵	باب دوم	
۷	خطی مساوات کی ترسیم	۴۰
۸	خطی ہزار مساواتوں کا ترسیمی حل	۷۶
۹	باب سوم	
۱۰	خطی کلیہ	۹۷
۱۱	عام ترسیمیں	۱۲۸
۱۲	باب چہارم	
۱۳	مساوات درجہ دوم	۱۵۹
۱۴	مساوات درجہ دوم کا ترسیمی حل	۱۹۳
۱۵	جوابات	۲۲۱



## تربیات

۱۔ مثبت اور منفی فاصلے۔ اس شکل میں ایک افقی مستقیم خط ہے جو دونوں طرف غیر محدود ہے۔

ب                      ا                      ج                      د

ایک نقطہ اس پر حرکت کرتا ہے اور ا سے چل کر ب پر پہنچتا ہے۔

علاوہ اور چیزوں کے اس نقطہ کے متعلق دو باتوں کا معلوم ہونا ضروری ہے، ایک یہ کہ اس نے کتنا فاصلہ طے کیا دوسرے کس سمت میں کیا۔

اگر ا اور ب کا درمیانی فاصلہ ۴ میل ہو جو ایک میل فی سنٹی میٹر کے حساب سے شکل میں دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں نقطہ مذکور نے ”۴ میل کا فاصلہ دائیں جانب“ طے کیا ہے۔

اب فرض کرو کہ یہ نقطہ ب سے چل کر واپس ا پر پہنچتا ہے، اس صورت میں اس نے ”۴ میل کا فاصلہ بائیں جانب“

طے کیا۔

دونوں صورتوں میں مطلق فاصلہ طے شدہ وہی ہے یعنی ہم میں، صرف فرق یہ ہے کہ اگر ایک فاصلہ ایک سمت میں طے ہوا ہے تو دوسرا اس کی متقابل سمت میں طے ہوا ہے۔ پس اگر ہم فاصلوں کو عددوں سے تعبیر کر کے اپنے احاطہ تحقیقات میں لانا چاہتے ہیں تو ہمیں فاصلہ کی سمت کو تعبیر کرنے کی تدبیر کرنی چاہیئے۔

علم حساب میں عدد مطلق سے بحث تھی، جبر و مقابلہ میں منفی عددوں کے مختل کو زیادہ کرنا پڑا اور مثبت اور منفی اعداد کی تشریح کے لئے عام فہم مثالیں سوچنا پڑیں، مثلاً ہم اس سے واقف ہیں کہ لین، دین، نفع، نقصان، درآمد، برآمد کی سب عام باتیں عددوں کے ماقبل مثبت اور منفی علامتیں رکھنے سے تعبیر ہو سکتی ہیں، مثلاً تین روپیہ کا نفع + ۳ سے اور تین روپیہ کا نقصان - ۳ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔ ان مثالوں سے ایک اصولی بات معلوم ہوتی ہے کہ اگر ایک عمل یہ صلاحیت رکھتا ہو کہ وہ عددوں سے تعبیر ہو سکے تو مثبت اور منفی علامتوں کے استعمال سے یہ عمل اور اس کا اُلٹ (یعنی متضاد) تعبیر ہو سکتے ہیں۔

اب چونکہ فاصلہ عددوں سے تعبیر ہو سکتا ہے اس لئے اس کی سمت کو ظاہر کرنے کی ایک تدبیر یہ ہے کہ ہم علامات جبر و مثبت اور منفی سے کام لیں۔

پس اوپر کی شکل میں اگر اس فاصلہ کو جو متحرک نقطہ ۱ سے ب تک جانے میں طے کرتا ہے  $+۴$  سے تعبیر کیا جائے تو ب سے ۱ تک کے فاصلہ کو  $-۴$  سے تعبیر کیا جائے گا، یہ بالکل اختیاری امر ہے کہ ہم کس سمت کے طے کر دہ فاصلوں کو مثبت قرار دیں مگر آئندہ ہمیشہ کے لئے ہم مان لیتے ہیں کہ دائیں سمت کے طے کر دہ فاصلے مثبت اور بائیں سمت کے فاصلے منفی خیال کئے جائیں گے۔

مثلاً اگر شکل میں ب اور ج کا درمیانی فاصلہ ۶ میل ہو تو ب سے ج تک جانے میں متحرک نقطہ  $-۶$  میل فاصلہ طے کرے گا اور ج سے ۱ تک جانے میں  $+۲$  میل اگر یہی نقطہ ۱ سے ب تک اور پھر ب سے ج تک جائے تو یہ  $+۴ - ۶ = -۲$  میل فاصلہ طے کرے گا اور اصل اس کی مسافت تو ۱۰ میل ہے لیکن اگر سمت کو ملحوظ رکھا جائے تو ایسا خیال کیا جائے گا کہ اس نے صرف  $-۲$  میل فاصلہ طے کیا ہے یعنی کل مسافت کے بعد یہ اپنے آپ کو نقطہ ابتدائی ۱ کے ۲ میل بائیں جانب پاتا ہے۔ اسی طرح کوئی نقطہ ۵، افقی خط پر ایسا ہے کہ ب اور ۵ کا درمیانی فاصلہ ۹ میل ہے، اگر ایک شخص نقطہ ابتدائی ب سے ۱ تک، ۱ سے ۵ تک اور ۵ سے ج تک جائے تو وہ فاصلہ  $-۴ - ۵ + ۳ = -۶$  میل طے کرے گا یعنی اس مسافت کے بعد وہ اپنے آپ کو مقام ب سے جہاں سے وہ چلا تھا

۶ میل بائیں جانب پائے گا۔ پس اس طرح سے ایک متحرک شے کا وہ فاصلہ جو اس نے فی الحقیقت طے کیا ہے حاصل نہیں ہوتا بلکہ وہ فاصلہ حاصل ہوتا ہے جو دائیں بائیں پھرنے پھرانے کے بعد اس کے آخری مقام اور ابتدائی مقام کے درمیان ہے۔ اسی طرح اگر امتصافی یا کھڑے خط پر فاصلے ناپنے کی ضرورت ہو تو ایک سمت کو مثبت خیال کرنا پڑے گا اور متقابل سمت کو منفی۔

ب۔ اس صورت میں بھی ہم مان لیتے ہیں کہ اوپر کسٹرن (رأسی سمت میں ۱) جو فاصلے ناپے جائیگے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف (شافولی سمت میں ۱) ناپے جائیگے وہ منفی ہونگے۔ مثلاً ا سے ب تک جانے میں جو فاصلہ طے ہو گا اس کو  $۴ +$  سے اور ب سے ا تک کے فاصلہ کو  $-۴$  سے تعبیر کیا جائے گا۔ اسی طرح ب سے ج تک جانے کا فاصلہ  $-۶$  ہے اور ج سے ا تک کا فاصلہ  $+۲$  ہے وغیرہ وغیرہ۔

۲۔ ایسا جملہ بار بار استعمال ہوتا ہے ”وہ فاصلہ جو ایک متحرک شے ا سے ب تک جانے میں طے کرتی ہے“ اس جملہ کی بجائے اختصار کی خاطر ہم ”ا ب“ لکھتے ہیں جہاں نقطہ ابتدائی و

پہلے لکھا گیا ہے اور نقطہ آخری ب بعد میں۔ اس طرح ج د سے وہ فاصلہ مراد ہوگا جو ایک شخص یا کوئی متحرک شے ج سے د تک جانے میں طے کرتی ہے، پس ا ب ایک مثبت عدد کے مساوی ہوگا اگر ب، ا کے دائیں جانب ہو اور منفی ہوگا اگر ب، ا کے بائیں جانب ہو، مثلاً

خط (۱) سے ا ب = ۳+      ا ————— ب      ۳

اور خط (۲) سے ا ب = ۳-      ا ————— ب      ۳

معلوم ہوا کہ ا ب جبریہ مقداروں کی طرح مثبت اور منفی ہو سکتا ہے اور دراصل یہ ہے بھی "فاصلہ مع سمت" اس کو ہم سمتی حصہ یا صرف سمتی کہیں گے۔

اگر ایک خط پر کسی ترتیب سے دو نقطے ا اور ب لئے جائیں مثلاً اوپر کے خط (۲) میں تو اس سے

$$ا ب = ۳ -$$

اور اسی خط سے ب ا = ۳+، پس اگر ہم ا ب کو مقدار پر ریاضی میں شریک کر لیں تو لازماً

$$ا ب + ب ا = ۳ + ۳ - = ۰$$

یعنی ا ب + ب ا = ۰ ..... (۱)

خواہ ب، ا کے کسی جانب واقع ہو۔

اس مساوات کا مطلب یہ ہے کہ اگر ایک متحرک شے ا سے ب تک جائے اور پھر ب سے ا پہ واپس آجائے تو نقطہ ابتدائی سے اس کا فاصلہ طے کر وہ صفر ہوگا۔



اسی طرح اگر تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک خط پر کسی ترتیب سے لئے جائیں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ان نقاط کے سب مقامات کے لئے



ا ب + ب ج = ا ج ..... (۲)

یعنی اگر ایک متحرک شے 'ا' سے 'ب' تک، پھر 'ب' سے 'ج' تک جائے تو اس مسافت کے بعد وہ نقطہ ابتدائی سے بلحاظ سمت اور مقدار کے اتنے ہی فاصلہ پر ہوگی گویا کہ وہ سید ہی 'ا' سے 'ج' تک گئی۔ مختلف صورتوں میں فاصلے ناپنے سے طالب علم خود اسکی تصدیق کرے۔

اب ظاہر ہے کہ دو یا زیادہ ستمی حصے 'ا ب'، 'ا ب'، 'ا ب' باہم ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر

(۱) وہ مقدار میں مساوی ہوں

اور (۲) ان کی سمتیں ایک ہی ہوں

اور (۳) وہ ایک ہی خط پر یا متوازی خطوط پر ناپے گئے ہوں

مثلاً شکل بنائیں

وغیرہ سب - ۳ سے تعبیر ہونگے۔

اب ہم یہ قید لگاتے ہیں کہ سب فاصلے ایک ہی خط پر

اور ایک ہی نقطہ سے ناپے جائیں یعنی ہر صورت میں مقام ابتدائی و ایک ہی ہو، اس طرح سے - ۳ کے مقابل ایک اور صرف ایک ہی سمتی و لم ہوگا جہاں نقطہ ۱ ایک مقررہ مستقیم خط پر و کے بائیں جانب ۳ اکائیوں کے فاصلہ پر ہے۔

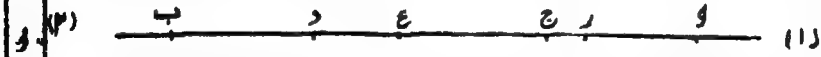


اسی طرح کسی اور عدد - ۳، ۵، ۲، ۴، ۶ وغیرہ }  
 کے مقابل صرف ایک سمتی ہوگا دیکھو شکل بالا  
 اس سے قبل ایک ہی عدد سے بیشتر سمتی  
 یا فاصلے تعبیر ہو سکتے تھے، صرف نقطہ ابتدائی  
 کو ثابت کر دینے سے ہر عدد کے مقابل ایک

فاصلہ اور ہر فاصلہ کے مقابل ایک ہی عدد رہ جاتا ہے۔ اس  
 امر کو ہم اگلی دفعہ میں استعمال کریں گے۔

### امثلہ نمبری ۱

۱۔ پیمانہ سے ناپ کر معلوم کرو کہ ذیل کے افقی خط پر فاصلے  
 ع، ج، ر، ع، د، ع، ر، د، ب، د، ج کن اعداد سے تعبیر ہونگے؟



۲۔ امتصائی خط (۲) پر فاصلے اول، ل، م، م، ج، اس،  
 د، ج، ر، ل کن اعداد سے تعبیر ہونگے؟

۳۔ افقی خط (۱) پر ایک شخص ج سے ب تک، ب سے  
 و تک، و سے د تک، د سے ر تک چلتا ہے، اس کو عددوں میں تعبیر کرو۔

اگر ایک سنٹی میٹر ایک میل کو تقیر کرے تو بتاؤ کہ وہ تمام مسافت کے بعد اپنی سمت روانگی میں کتنے میل چلا۔  
۴۔ شکل سے ثابت کرو کہ

$$(۱) ۰ = ۷ - ۱۱ + ۶ - ۲$$

$$(۲) ۱۵ = ۹۵ - ۲۵ + ۴۵ + ۲ - ۳۵ + ۱۵$$

۵۔ ایک مستقیم خط اب پر نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' کسی ترتیب سے لئے گئے ہیں ثابت کرو کہ

$$(۱) ا ب + ب ج + ج د + د ا = ا ب$$

$$(۲) ا ب + ب ج + ج د + د ا = ۰$$

۶۔ ایک غیر محدود خط اب پر کوئی نقطہ و لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ و کے تمام مقامات کے لئے

$$ا ب = و ب - و ا$$

۷۔ ایک غیر محدود خط اب پر کوئی نقطہ و لیا گیا ہے، اگر اب کا وسطی نقطہ م ہو تو ثابت کرو کہ و کے سب مقامات کے لئے

$$۲ م = و ا + و ب$$

۳ ایک خط پر کسی نقطہ کا تعین



فرض کرو کہ ایک مستقیم خط لا لا پر کوئی نقطہ ا ہے اور اس نقطہ کا مقام

دریافت کرنا مطلوب ہے۔

عام طور پر کسی مقام کی تعین اس صورت میں ممکن ہے جب کہ اس کے قریب کوئی ایسی جگہ واقع ہو جس کے مقام اور محل سے ہم بخوبی واقف ہوں اور لحاظ جس کے مقام مذکور کی تعین ہو سکتی ہو۔

اس لئے ۱ کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہم کوئی نقطہ و مستقیم خط پر مقرر کرتے ہیں اور اس نقطہ کے لحاظ سے اس خط پر کے تمام نقطوں کے مقام معلوم کرتے ہیں، پس و ہمارا ابتدائی نقطہ ہے، آئندہ ہمارے سب فاصلے اس ثابت نقطہ سے ناپے جائیں گے۔ اس نقطہ کو ہم مبداء کہیں گے۔

ظاہر ہے کہ نقطہ ۱ (یا کسی اور نقطہ) کے مقام کا تعین ہو سکے گا اگر اس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ سے معلوم ہو اور یہ بھی معلوم ہو کہ نقطہ ۱ کے کس جانب واقع ہے۔ اب شکل صفحہ ۸ میں ۱، ۵ سے اکائیاں دائیں جانب واقع ہے اس لئے حسب دفعہ ۱ فاصلہ ۱ + ۵ سے تعبیر ہو گا، نیز چونکہ سب فاصلے ایک ثابت نقطہ سے ناپے جا رہے ہیں اس لئے ۵ سے اور کوئی فاصلہ یا سمتی سوائے ۱ کے تعبیر نہیں ہو سکتا اور فاصلہ ۱ + ۵ کرنے سے (یعنی ۵ سے اکائیاں دائیں جانب جانے سے) ہم ایک اور صرف ایک ہی نقطہ ۱ پر پہنچتے ہیں، اس لحاظ سے ہم ۵ کو نقطہ ۱ کا محدود





ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ما و ما ایک غیر محدود انتصابی خط ہے، یہ ہم پہلے فیصلہ کر چکے ہیں کہ جو فاصلے اوپر کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت ہوں گے اور جو نیچے کی طرف ناپے جائیں گے وہ منفی ہوں گے۔

اب ہم اپنا نقطہ ابتدائی یعنی مبدأ واس خط  
پر مقرر کرتے ہیں سب فاصلے نقطہ و سے ناپے  
جائیں گے۔

ظاہر ہے کہ  $+ ۳۵$  سے صرف فاصلہ  $\Delta$  یعنی پھیلاؤ ہے اور یہ فاصلہ  $\Delta$  طے کرنے سے (یعنی  $+ ۳۵$  اکائیاں اوپر کی طرف جانے سے) ایک اور صرف ایک نقطہ  $\Delta$  حاصل ہوتا ہے، اس لحاظ سے ہم  $+ ۳۵$  کو نقطہ  $\Delta$  کا محدود کہتے ہیں۔ اسی طرح  $- ۳۵$  اکائیاں نیچے کی طرف جانے سے ہم صرف نقطہ  $\Delta$  پر پہنچتے ہیں اس لئے  $- ۳۵$  نقطہ  $\Delta$  کا محدود ہے۔  
یہ ہر مثبت یا منفی عدد کے جواب میں خط

ما و ما پر ایک اور صرف ایک نقطہ ہے اور بلحاظ مبدأ  
و کے اس خط پر کے ہر نقطہ کا ایک اور صرف ایک  
محدود ہے۔

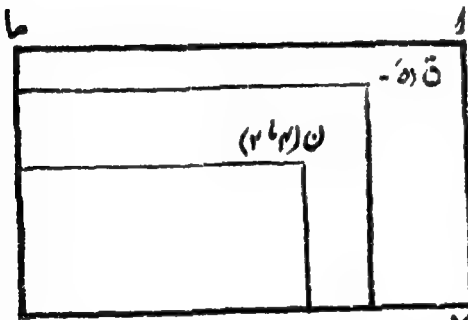
مثلاً ۱۱۷ محدود ہے نقطہ ف کا





۳ ہے، پس اگر ہر نشست کے لئے ہم پیمائش کی یہی ترتیب مقرر کر لیں یعنی پہلے و ما سے پھر ولا سے تو دو اعداد (۳، ۴) سے ۱ کی نشست کا تعین ہو سکتا ہے اسی طرح سے اعداد (۴، ۵) نشست ۲ کا تعین کرتے ہیں۔ وغیرہ وغیرہ

اب فرض کرو کہ



ولا و ما ایک مستطیل

شکل کی میز ہے، اور

اس پر کوئی نقطہ ن

ہے جس کا مقام ہم

عددوں کے ذریعہ

متعین کرنا چاہتے ہیں، ظاہر ہے کہ اگر میز کے دو متصل

کناروں سے ن کے فاصلے ناپے جائیں تو ان فاصلوں

کے ذریعہ ہم اس نقطہ کا تعین کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ

کنارے ولا اور و ما ہیں۔ اب اگر ایک سنتی میٹر ایک

فٹ کو تعبیر کرے تو ن کا فاصلہ و ما سے ۴ فٹ ہے اور

ولا سے ۲ فٹ۔

پس اگر ہر نقطہ کے یہ فاصلے اسی ترتیب سے ناپے جائیں

یعنی پہلے و ما سے اور پھر ولا سے تو اعداد (۲، ۴) نقطہ

ن کے مقام کی پورے طور پر تعین کرتے ہیں۔ یہ اس طرح

سے بھی ظاہر ہے کہ اگر ہم و سے شروع ہو کر ولا پر ۴ فٹ

جائیں، پھر ۲ فٹ و ما کے متوازی چلیں تو ہم میز کے

ایک اور صرت ایک ہی نقطہ ن پر پہنچتے ہیں، پس ن کے مقام کا تعین (۲،۴) سے ہو سکتا ہے۔

اسی طرح سے ق کے مقام کا تعین (۳،۵) سے ہو سکتا ہے کیونکہ ق کا فاصلہ و ما سے ۵ فٹ ہے اور و لا سے ۳ فٹ، یا اگر ہم و سے شروع ہو کر و لا پر ۵ فٹ پھر و ما کے متوازی ۳ فٹ جائیں تو ہم صرت نقطہ ق پر پہنچتے ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ کا مقام مقرر کرنے کے لئے دو پیمائشوں کی ضرورت ہوتی ہے یعنی سطح پر کا کوئی نقطہ دو عددوں سے تعبیر ہو گا۔

میز کی صورت میں سطح مستوی محدود ہے، لیکن ہمارے خطوط مستقیم (دفعات ۳ اور ۴) کی طرح یہ سطح بھی ہر سمت میں غیر محدود ہو سکتی ہے اور اس پر کے ہر نقطہ کا تعین دو پیمائشوں یا دو عددوں کے ذریعہ ہو سکتا ہے بشرطیکہ ہم فاصلوں کی سمتوں کو ملحوظ رکھیں۔

۴۔ سطح مستوی پر کے نقاط کی تعیین - فرض کرو کہ ایک سطح مستوی چاروں طرف غیر محدود ہے اور اس پر کے تمام نقطوں کا تعین ہم عددوں کے ذریعہ کرنا چاہتے ہیں۔ اس سطح پر ایک نقطہ ۱ لو جس کی تعیین منظور ہے۔

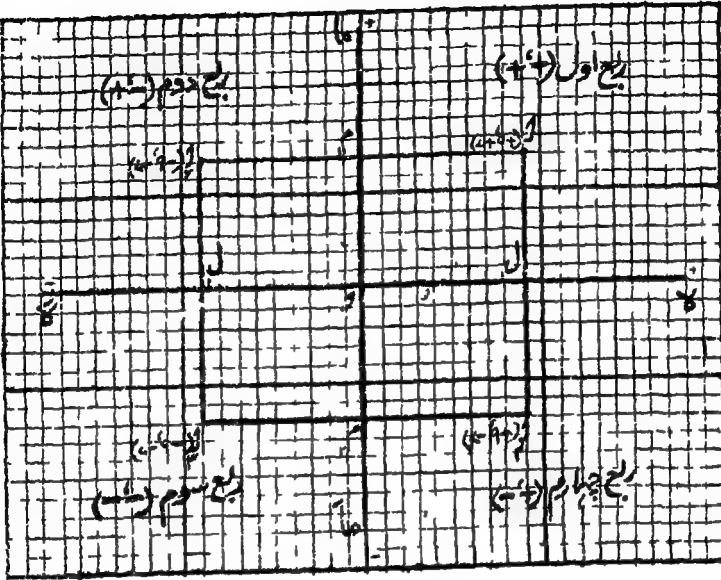
سب سے پہلے ہم اس سطح مستوی پر کوئی نقطہ ابتدائی و مقرر کرتے ہیں جس سے ہمارے سب فاصلے ناپے جائیں گے، اس نقطہ کو ہم مبدأ کہیں گے۔

بتر فاصلوں کی سمتوں کو مقرر کرنے کے لئے مبدأ میں سے گزرتے ہوئے دو غیر محدود مستقیم خط لاؤ لا اور ما و ما کھینچو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں دیکھو شکل صفحہ ۱۷۔

ان فاصلوں کی سمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے ہم ان حسابی دستوروں کو ملحوظ رکھیں گے جو ہم پہلے مقرر کر چکے ہیں یعنی (۱) جو فاصلے لا و لا پر یا اس کے متوازی دائیں جانب و لا کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت عددوں سے تعبیر ہوں گے اور جو بائیں جانب و لا کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی عددوں سے تعبیر ہوں گے۔

(۲) اور اسی طرح جو فاصلے دوسرے خط ما و ما پر یا اس کے کسی متوازی خط پر اوپر کی جانب و ما کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت ہوں گے اور جو نیچے کی طرف یعنی و ما کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی ہوں گے۔

خطوط لا و لا اور ما و ما کو حوالہ کے محور یا اختصاراً صرف محور کہتے ہیں بعض اوقات لا و لا کو محور لا اور ما و ما کو محور ما بھی کہتے ہیں۔ ان پر مثبت یا منفی علامتیں لکھ دی گئی ہیں جو ان کی سمتوں کو تعبیر کرتی ہیں۔



نقطہ ۱ سے ان محوروں پر عمود  $OL$ ،  $OM$  نکالو۔  
 اب  $O$  سے  $L$  تک پہنچنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم فاصلہ  
 $OL$  دائیں جانب محور  $OL$  پر چلیں اور پھر فاصلہ  $LM$  (یعنی فاصلہ  
 دوم) محور  $OM$  کے متوازی اوپر کی طرف طے کریں، یہ فاصلہ  
 ( $OL$ ،  $LM$ ) اس نقطہ کے ساتھ خاص طور پر منسوب ہیں،  
 ان کو طے کرنے سے ہم سطح کے ایک اور صرف ایک نقطہ  $A$   
 پر پہنچ سکتے ہیں۔ اس لحاظ سے ان فاصلوں یعنی  $OL$ ،  $LM$  کو  
 نقطہ  $A$  کے محدود کہتے ہیں، ان کی اہمیت کی وجہ سے  
 ان فاصلوں کو الگ الگ نام دئے گئے ہیں، فاصلہ  $OL$

کو جو محور لاہیا اس کے کسی متوازی پر طے کیا گیا ہے نقطہ  $\Delta$  کا  
فصلہ کہتے ہیں اور  $\Delta$  کو جو محور  $\Delta$  کے متوازی طے کیا  
گیا ہے نقطہ  $\Delta$  کا معین کہتے ہیں۔ طالب علم ان ناموں  
سے مرعوب نہ ہو جائے یہ محض اس نقطہ کے فاصلے ہیں  
دو خطوں سے۔

پس نقطہ  $\Delta$  کے محدود  $\Delta$  اور  $\Delta$  ہیں، لیکن پیشتر اس کے  
کہ ہم ان فاصلوں کی پیمائش کر سکیں ہمیں فاصلہ ناپنے کی ایک  
اکائی مقرر کر لینی چاہیئے، لیکن یہ ضروری نہیں کہ محور  $\Delta$  اور  
محور  $\Delta$  پر کے فاصلوں کی اکائیاں مساوی ہوں، ہم محور  $\Delta$   
اور  $\Delta$  کے متوازی فاصلوں کے لئے اکائی  $\Delta$  اور محور  $\Delta$  اور  $\Delta$  کے  
متوازی فاصلوں کے لئے اکائی  $\Delta$  فرض کر سکتے ہیں، مگر  
فی الحال سہولت کے لئے ہم یہ مان لیں گے کہ یہ اکائیاں دونوں محوروں کیلئے  
مساوی ہیں اور مربع دار کاغذ کے چھوٹے خانہ کا طول دونوں  
محوروں پر ایک اکائی کو تعبیر کرتا ہے یعنی  $\frac{1}{2}$  انچ (پہلے)  $\Delta = 1$   
پس اس اکائی کے موافق فاصلہ  $\Delta = 1 + 1$  اور  
 $\Delta = 1 + 1$  اس لئے نقطہ  $\Delta$  کے محدود  $(1 + 1)$  ہوئے،  
پس ایک ہندسی نقطہ  $\Delta$  کا نام عددوں میں  $(1 + 1)$  رکھا گیا۔  
یاد رہے کہ اس عددی تعبیر میں ہم نے محور  $\Delta$  کے  
متوازی فاصلہ (فصلہ) کو پہلے لکھا ہے اور محور  $\Delta$  کے متوازی  
فاصلہ (معین) کو بعد میں۔ آئندہ سب نقطوں کے لئے  
یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

حوالہ کے محور مستوی سطح کو چار حصوں یا ربعوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

سطح کے اُس حصہ کو جو ولا اور وِما سے گھرا ہوا ہے ربع اول کہتے ہیں۔ اور جو وِما اور ولا سے گھرا ہوا ہے ربع دوم کہتے ہیں اسی طرح سے جو ولا اور وِما کے درمیان ہے اس کو ربع سوم اور جو وِما اور ولا کے درمیان ہے اس کو ربع چہارم کہتے ہیں۔

ہم نے نقطہ  $A$  کو ربع اول میں لیا اور دیکھا کہ اس کے دونوں محدود  $(+q, +)$  مثبت عدد ہیں، نیز ظاہر ہے کہ ربع اول میں ہر نقطہ کے محدود دو مثبت عدد ہونگے کیونکہ اس ربع کے کسی نقطہ تک پہنچنے کے لئے ہمیں محور لا پر دائیں جانب اور پھر سیدھا اوپر کی طرف جانا پڑتا ہے اور یہ محوروں کی مثبت سمتیں ہیں۔

اب ہم باقی تین ربعوں میں ایک ایک نقطہ لینے سے دیکھتے ہیں کہ ان ربعات کے متعلقہ محدودوں کی علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔ مناسب ہو گا کہ لمحاظ محوروں کے نقطہ  $A$  کے عکس لینے سے جو مستطیل بنے اس کے راسوں کے محدود معلوم کئے جائیں۔ ان سے علامات مذکورہ کا پتہ چلے گا۔

یہ مستطیل ہندسی طریق پر اس طرح بنے گا،  $A$  اور  $A'$  محوروں پر عمود ہیں،  $A$  کو  $A'$  اتنا خارج کرو کہ  $A'A = A$  اور  $A$  کو  $A''$  تک اتنا خارج کرو کہ  $A'A'' = A$

اب اس متوازی الاضلاع کی تکمیل کرو جس کے راس  $A, B, C$  ہیں اور چوتھے راس کا نام  $D$  رکھو۔ نیز فرض کرو کہ  $D$  لمحور  $AC$  پر اور  $D$  لمحور  $AB$  پر کاٹتے ہیں۔

اب  $D$  سے  $A$  تک پہنچتے ہیں فاصلہ  $AD$  بائیں جانب محور  $AC$  پر اور  $AD$  اوپر کی طرف محور  $AB$  کے متوازی جانا پڑتا ہے اور چونکہ  $AD = -AD$ ،  $AD = AD$ ،  $AD = AD$  اس لئے  $D$  کے محدود  $(-AD, AD)$  ہیں۔

نیز  $D$  سے  $B$  تک پہنچنے کے لئے  $B$  اکائیاں بائیں جانب اور  $B$  اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے۔ اس لئے  $D$  کے محدود  $(-B, B)$  ہیں۔

اسی طرح  $D$  سے  $C$  تک پہنچنے کے لئے  $C$  اکائیاں دائیں جانب اور  $C$  اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے اس لئے  $D$  کے محدود  $(-C, C)$  ہیں۔

یاد رہے کہ نقاط  $A, B, C, D$  کے محدودوں کی عددی قیمتیں ایک ہی ہیں  $B$  اور  $C$  لیکن ان کے قبل مثبت اور منفی علامتیں مختلف ترتیبوں میں رکھنے سے ہمیں چار مختلف نقطے سطح پر حاصل ہوتے ہیں، اسی طرح عددوں کے کسی جوڑے سے ہمیں چار نقطے ملیں گے۔

اب ہم چاروں ربعات کے محدودوں کی علامتوں کا فیصلہ کر سکتے ہیں۔

رہج اول میں کے تمام نقطوں کیلئے دائیں جانب اور اوپر جانا پڑتا ہے اسلئے محدود کی علامتیں (+، +) ہیں  
 رہج دوم " بائیں جانب اور اوپر " " (-، +)  
 رہج سوم " بائیں جانب اور نیچے " " (-، -)  
 رہج چہارم " دائیں جانب اور نیچے " " (+، -)  
 اب اگر سطح کے کسی نقطہ کے محدود ٹپے ہوں تو ہم محض دیکھنے سے معلوم کر سکتے ہیں کہ یہ نقطہ کس رہج میں واقع ہے۔

اوپر کے سب نقطوں کے محدود عددی تھے اس لحاظ سے یہ خاص نقطے کہلاتے ہیں، اب فرض کرو کہ کوئی عام نقطہ N ہے اور اس پر پہنچنے کے لئے ہمیں فاصلہ لا محور لا پر اور فاصلہ لا محور صا کے متوالی جانا پڑتا ہے تو اس نقطہ N کے محدود (لا، لا) ہونگے۔

یاد رہے کہ لا، لا محض عدد ہیں، صرف انہوں نے جبر متقابل کا حریفی لباس پہنا ہوا ہے، یہ عام سے عام نقطہ N کے محدود ہیں اور وہ اس لئے کہ اس نقطہ کے محدودوں (لا، لا) کو خاص عددی قیمتیں دینے سے اس سطح پر کے تمام نقطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر (لا، لا) کی جگہ اعداد ذیل کے زوج  
 (0، 0) (4، 4+) (4، 4-) (4، 9-) (4، 9-) (4، 9+) (4، 9-) (4، 9+) (0، 9+) (0، 9-) (4، 0-) (4، 0+) (4، 0-) (4، 0+) وغیرہ مندرج کئے جائیں تو خاص نقاط و، ا، ب، ج، د، ل، ل، ل، م، م، م وغیرہ حاصل ہوتے ہیں۔



یہ عام سے عام محدود (لا، ما) جبریہ حروف کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئے اگر گویا (لا، ما) ایک نقطہ کے محدودوں کی جبریہ صورت ہے۔

نوٹ - اس دفعہ میں ہم نے ا کے محدودوں، ل، م، ن، مقرر کئے ہیں۔

ظاہر ہے کہ محدودوں سے ا کے عمودی فاصلے (م، ل، ن، ا) بھی اس کے مقام کا تعین کر سکتے ہیں۔ یعنی ہم (م، ل، ن، ا) کو بھی نقطہ ا کے محدود کہہ سکتے ہیں اور چونکہ ول، م، ن، ا، سب اور پائش کے م، ا کے مساوی ہے اس لئے یہ دونوں محدود دونوں صورتوں میں ایک ہی ہیں، بعض اوقات ایک نقطہ کے محدودوں کو عمودی فاصلے تصور کرنا مناسب ہوتا ہے، مثلاً

(۱) سبھا کے محدود (۰، ۱) ہیں۔

(۲) محور لا پر کے سب نقطوں کا معین یعنی ما محدود صفر ہے، مثلاً ل کے محدود (۰، ۹+) ہیں۔

(۳) محور ما پر کے سب نقطوں کا فاصلہ یعنی لا محدود صفر ہے، مثلاً م کے محدود (۰، ۷+) ہیں۔

۷۔ - دفعہ گزشتہ میں ہم نے ہندسی نقطوں کو عددوں کے ذریعہ نامزد کیا، پس اگر سطح مستوی پر کوئی ہندسی نقطہ

۱ لیا جائے تو ہم اس کا عددی نام یعنی اس کے محدود معلوم کر سکتے ہیں۔

برعکس اس کے اگر ایک نقطہ کے محدود جائیں تو اس کے ہندسی مقام کا تعین ہو سکتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدود (۳، ۸) یا عام طور پر (۸، ۳) معلوم ہیں اور سطح مستوی پر اس کا مقام مطلوب ہے، صورت اول میں ہمیں سبدا سے بائیں جانب محور لا پر فاصلہ کی ۳ اکائی کسی پٹری یا پیمانہ کی مدد سے نا پنی چاہئیں اور پھر اسی یا کسی اور پیمانہ کے موافق ۸ اکائیاں سیدھے اوپر کی طرف محور ہا کے متوازی جانا چاہیئے۔ اس طرح سے نقطہ مفروضہ کا مقام متعین ہو جائے گا۔ جب نقطہ کے محدود معلوم ہوں تو اس طرح سے اس کے مقام معلوم کرنے کے عمل کو نقطہ کا رسم کرنا یا مرتسم کرنا کہتے ہیں۔ یہ عمل نہایت آسانی سے مربع دار کاغذ کی مدد سے ہو سکتا ہے، مربع دار کاغذ پر متساوی الفضل افقی اور عمودی خط کھینچے ہوئے ہوتے ہیں اور ہر پانچواں یا دسواں خط اور خطوں کی نسبت قدرے جلی ہوتا ہے جس کی وجہ سے ان سمتوں میں فاصلوں کا ناپنا آسان ہو جاتا ہے۔

مربع دار کاغذ کے استعمال سے پیمانہ کی ضرورت نہیں رہتی کیونکہ فی الحقیقت اس کاغذ کے ہر مقام پر پیمائے مندرج ہوتا ہے۔

مربع دار کاغذ بالعموم دو طرح کا ہوتا ہے، ایک وہ جو انچوں اور اینچ کے دسویں حصوں میں تقسیم کیا ہوا ہوتا ہے اور دوسرہ جو سنتی میٹر اور اس کے دسویں حصوں میں منقسم ہوتا ہے، ہندی کو چاہیئے کہ انچوں والا کاغذ استعمال کرے تاکہ شکلیں درست اور کشادہ ہوں۔

نوٹ۔ انچوں والے کاغذ میں سب سے چھوٹے خانہ کا منسلح اینچ ہے اس ضلع کو بعض اوقات ہم چھوٹا حصہ کہیں گے۔ کچھ عرصہ ہوا کہ یہ کاغذ بہت گراں تھا اور بہت کم لوگ اسے استعمال کرتے تھے اور وہ بھی اہم مسائل کے حل کرنے میں۔ مگر پروفیسر پیٹری (لندن یونیورسٹی) کی قابل قدر کوششوں نے اس کے دائرہ استعمال کو بہت وسیع کر دیا، ان کے ہاں ابتدائی ریاضی کی طلبہ اس کو کثرت سے استعمال کرتے ہیں اور اپنے لکچروں اور جوابات کو قریب قریب ایسے ہی کاغذوں پر لکھتے ہیں۔

طالب علم کو یہ خیال پیدا نہ ہو کہ ترسیات اور مربع دار کاغذ کے استعمال کے لئے علم ریاضی کے دقیق مسائل کا جاننا ضروری ہے، تجارت پیشہ لوگ اور دوکاندار اس کاغذ کو بے تکلف استعمال کرتے ہیں اور وہ ریاضی کے گرانمایہ اور مفید مسائل سے چنداں واقف نہیں ہوتے۔

محوروں کے عام استعمال اور مربع دار کاغذ پر نقطے منقسم کرنے کی چند ابتدائی مثالیں ہم ذیل میں درج کرتے ہیں، کاغذ

پر نقطے رسم کرنے میں طالب علم کو باریک نوکدار سخت پینل استعمال کرنی چاہیے، نقطہ کا مقام ظاہر کرنے کے لئے اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنا دیا جائے یا عین اس مقام پر ایک چھوٹا چلیپی نشان بنا دیا جاسکتا ہے جس کی شاخوں کا نقطہ تقاطع ٹیک مقام مطلوبہ پر منطبق ہو۔

مشق ۱۔ شکل کھینچنے سے نقاط (۹، ۸) (۶، ۶) (۴، ۴) (۳، ۳) (۲، ۲) (۱، ۱) (۰، ۰) (۱، ۱) (۲، ۲) (۳، ۳) (۴، ۴) (۶، ۶) (۹، ۸) کے مقام دیانت کرو اور بتاؤ کہ یہ نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

سب سے پہلے محور لاؤ اور

ما و ما کھینچو۔

نیز پیمانہ کے لئے فرض کرو کہ دونوں

محوروں پر طول کی اکائی چھوٹے

مربع کے ایک ضلع سے (یعنی چھوٹے

حصہ) سے تعبیر ہوتی ہے، اس شکل

میں جو کا غذا استعمال کیا گیا ہے اس

میں ایک اینج دس مساوی حصوں میں

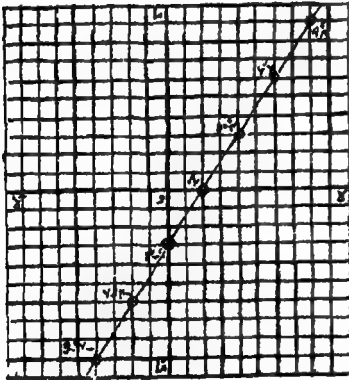
منقسم ہے، اس لئے شکل کا پیمانہ ہوگا

$$\frac{1}{10} \text{ اینج} = 1 \text{ یونٹ (یعنی } \frac{1}{10} = 1)$$

اب نقطہ (۶، ۶) کا مقام معلوم

کرنے کے لئے ۶ اکائیاں یعنی ۶ چھوٹے حصے محور لا پر دائیں جانب

اور ۶ چھوٹے حصے اوپر کی طرف محور ما کے متوازی ہو، اور اس



مقام کو ظاہر کرنے کے لئے اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنا دو۔  
(۱۰۲) کا مقام معلوم کرنے کے لئے ۲ چھوٹے حصے دائیں جانب  
محور لا پر لو اور بس کیونکہ اس کا معین صفر ہے، ہم جانتے ہیں کہ محور لا پر  
کے سب نقاط کے ماحمد یعنی معین صفر ہوتے ہیں۔

اسی طرح (۱۰۳) کا مقام معلوم کرنے کے لئے مبدأ سے  
محور لا پر دائیں جانب جانے کی ضرورت نہیں کیونکہ اس نقطہ کا  
فصلہ صفر ہے، لیکن مبدأ سے ۳ چھوٹے حصے محور ما پر نیچے کی طرف  
جانا ہوگا۔ یہ نقطہ محور ما پر واقع ہے اس لئے اس کا فصلہ صفر ہے،  
باقی نقاط کے مقامات کا تعین بھی اسی طرح ہو سکتا ہے۔

مثلاً (۱۰۲-۶) کے لئے ۲ حصے بائیں جانب اور ۶ نیچے کی طرف  
اور (۱۰۳-۹) کے لئے ۴ بائیں طرف اور ۹ نیچے جاننا ہوگا۔

ان سب نقطوں کے مقامات کے گرد چھوٹے چھوٹے دائرے  
بنا دئے گئے ہیں اور ان مقامات پر ایک کا لے تا گے کو تان کر ہم  
دیکھ سکتے ہیں کہ یہ سب کے سب قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے  
ہیں۔

شکل میں ایک سیدھی پٹری سے وہ مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو  
قریب قریب ان نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

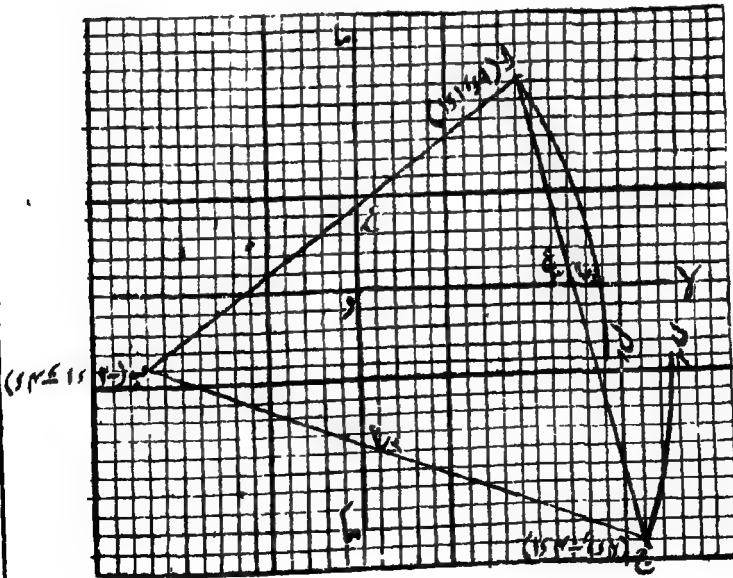
مشق ۳۔ نقاط ۱ (۱۰۳-۷) 'ب' (۱۰-۷) 'ج' (۱۰-۶)  
۵ (۱۳-۶) کو مربع دار کا غذ پر مرسم کرو اور ذوالربعۃ الاصلع  
۱ ب ج د کے اصلاع کا طہل اور رقبہ دریافت کرو۔  
دونوں محوروں کی سمتوں میں طول کی اکائی کو چھوٹے مربع



میں ۲۳ چھوٹے مربع ہیں، اس لئے مستطیل ۱ ب ج د میں  
چھوٹے مربعوں کی کل تعداد  $۲۳ \times ۱۳ = ۲۹۹$  ہوگی یعنی ۱ ب ج د  
کا رقبہ ایک چھوٹے مربع کے رقبہ کا ۲۹۹ گنا ہے۔

چونکہ چھوٹے مربع کا رقبہ  $= \frac{1}{13} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{299}$  مربع انچ  
اس لئے ۱ ب ج د کا رقبہ  $= ۲۹۹ \times \frac{1}{299} = ۱$  مربع انچ

مشق ۳۔ ایک مثلث کے رأس بالترتیب ۱ (۹، ۱۰)،  
ب (۱۲، ۱۵)، ج (۱۵، ۱۲) ہیں، اس کو بناؤ اور جن  
نقطوں پر اس کے اضلاع محوروں سے ملتے ہیں ان کے محدد معلوم  
کرو، نیز اس مثلث کا رقبہ اور اس کے اضلاع کے طول معلوم کرو



اس مثال میں مشق ۲ کی نسبت فاصلہ ناپنے کی بڑی اکائی منتخب

کرنی چاہیئے، فرض کرو کہ دونوں محوروں پر اکائی ایک اینج سے تعبیر ہوتی ہے، اس صورت میں چھوٹا حصہ اکائی کے  $\frac{1}{2}$  یعنی ۱ کو تعبیر کرے گا۔  
اکو مرتبہ کرنے کے لئے ۹ چھوٹے حصے دائیں طرف اور ۱۱ حصے اوپر  
کی طرف جانا ہوگا کیونکہ ایک چھوٹا حصہ ۱ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ب (-۱۵۲ - ۴) کے لئے ۱۲ حصے بائیں طرف اور ۴ حصے نیچے جانا ہوگا  
اور ج (۱۵۶ - ۱۴) " ۱۶ " دائیں " ۱۴ " نیچے "۔

منطق اب محور ماما کو ع پر قطع کرتا ہے، اب ع مبداء سے  
چوتھے اور پانچویں افقی خطوط کے درمیان واقع ہے یعنی فاصلہ ع مبداء سے  
اور ۵ کے درمیان ہے۔ اگر اس چھوٹے حصے کو جس میں ع واقع  
ہے دس مساوی حصوں میں تقسیم ہوا ہو خیال کریں تو ایسا ہر ایک  
حصہ  $\frac{1}{20}$  یعنی ۰.۵ کے مساوی ہوگا، ایسے پانچ حصے ۰.۵ کے مساوی  
ہونگے وغیرہ وغیرہ اب نقطہ ع خطوط مذکورہ کے درمیان کے نقطہ  
سے کچھ نیچے ہے، اس لئے جہاں تک ہم دیکھ سکتے ہیں  
دفعہ ۳۴ و گویا ع کے محدود (۱۰۳۴) ہیں کیونکہ یہ نقطہ محور ماما  
پر مبداء سے اوپر کی جانب واقع ہے۔

اسی طرح ب ج اور محور ماما کے نقطہ تقاطع ع کے محدود  
قریب قریب (۱۰ - ۱۸۶) ہیں

اور ج ۱ اور محور لا لا کے نقطہ تقاطع ع کے محدود قریب قریب  
(۱۵۲۱) ہیں۔

رقبہ دریافت کرنے کے لئے مختلف کے اند چھوٹے مربوں کی  
تعداد معلوم کرو، اور ایسا کرنے میں چھوٹے مرب کی کسروں کو بھی



ملفوظ رکھو، جو نصف کے برابر یا نصف سے زیادہ ہوں ان کو پورا مربع شمار کرو اور جو نصف سے کم ہوں ان کو نظر انداز کرو۔

مثلاً ا ب ج میں چھوٹے مربعوں کی کل تعداد ۳۱۵ ہے اور چھوٹے مربع کا رقبہ  $15 \times 15 = 225$  مربع اکائیاں، اسلئے شلٹ ا ب ج کا رقبہ  $315 - 225 = 90$  مربع اکائیاں یا مربع پنچ۔

ا ب کا طول معلوم کرنے کے لئے ب کو مرکز اور ب ا کو نصف قطر مان کر پرکار سے ایک دائرہ کی قوس کھینچو جو ب میں سے گزرنے والے افقی خط کو ل پر ملے تب ب ا = ب ل = ۲۶ چھوٹے حصے = ۲۶۹ اکائیاں، اسی طرح ب کو مرکز اور ب ج کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو افقی خط سے ل پر ملے تب ب ج = ب ل = ۲۹۸ چھوٹے حصے = ۲۹۸ اکائیاں، اسی طرح ج کا طول معلوم ہو سکتا ہے پتھر کی سے ناپ کر ان نتائج کی تصدیق کرو۔

اگلی دفعہ میں ہم نظری طریق پر ایسے دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرینگے جن کے محدود معلوم ہوں۔



## امثلہ نمبری ۱

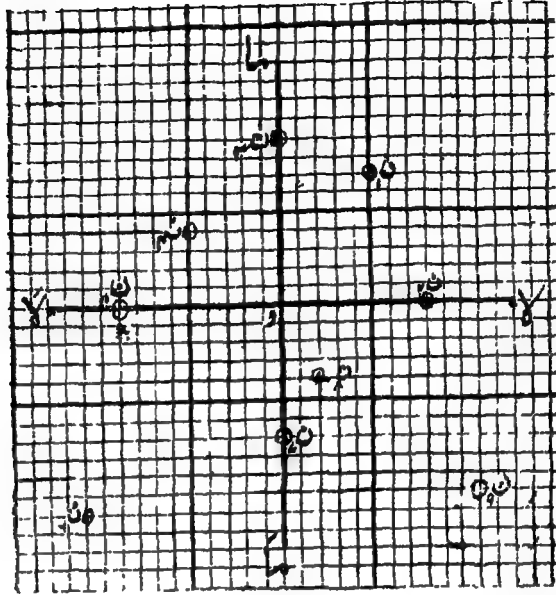
۱۔ اگلے صفحہ کی شکل میں

(ا) ایک ایچ کے دسویں حصہ کو

(ب) ایک ایچ کو

(ج) ایک ایچ کے نصف کو

طول کی اکائی مان کر نقاط ن، ن، ن، ن، ن، ن، ن، ن کے محدود معلوم کرو



۲ - خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کے سروں پر جو نقطے ہیں ان کے محدود معلوم کرو۔ پیمانہ  $(\frac{1}{10} = 1)$

۳ - مثلث ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کے راسوں کے محدود معلوم کرو۔ پیمانہ  $(1 = 1)$

۴ - نقاط ذیل کے شکل پر نشان دو۔

(۱) (۰، ۰)، (۰، ۴)، (۴، ۰)، (۴، ۴)

(۲) (۹، ۹)، (۱۶، ۱۶)، (۹، ۹)، (۱۶، ۱۶)

(۳) (۱۱، ۴)، (۱۱، ۱۱)، (۴، ۱۱)، (۴، ۱۱)

پیمانہ  $(\frac{1}{10} = 1)$

۵ = نقاط ذیل کو مرتب کرو

(۱) (۱۵۵، ۲۳۳)، (۱۵۸، ۲۳۶)، (۱۶۲، ۲۴۰)، (۱۶۵، ۲۴۳)

(۲)  $(-۱۵۳'۲۵۳)$ ،  $(-۱۵۴'۱۵۴)$ ،  $(-۱۵۰'۲۵۰)$

(۳)  $(-۱۸۸'۱۸۸)$ ،  $(-۲۵۳'۲۵۳)$ ،  $(-۲۵۴'۲۵۴)$

پیمانہ - اکائی کو ایک اینچ سے تعبیر کرو ( $۱ = ۱$ )

۶ - ثابت کرو کہ ذیل کی ہر صورت میں جن نقطوں کے محدودے گئے ہیں وہ نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱)  $(۰'۳)$ ،  $(۱'۵)$ ،  $(۲'۱)$ ،  $(۳'۳)$

(۲)  $(۲'۰)$ ،  $(۲'۲)$ ،  $(۲'۴)$ ،  $(۳'۱)$

(۳)  $(۲'۰)$ ،  $(۲'۴)$ ،  $(۲'۲)$

(۴)  $(۳'۰)$ ،  $(۰'۱)$ ،  $(۳'۲)$

۷ - جہاں ذیل کے نقطوں کو ملانے والے خط (محدودہ بشرط ضرورت) محاورہ لا ولا اور ما وما سے ملتے ہیں ان نقطوں کے محدود معلوم کرو۔

(۱)  $(۳'۴)$ ،  $(۲'۳)$  (ب)  $(۴'۱)$ ،  $(۴'۲)$

(ج)  $(۲'۲)$ ،  $(۵'۳)$

۸ - ذیل کی ہر ایک صورت میں چاروں نقطوں کو مرتبہ کرو اور ثابت کرو کہ یہ نقطے ایک مستطیل کے رأس ہیں، نیز ہر صورت میں مستطیل کے اضلاع کے طول اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱)  $(۵'۲۲)$ ،  $(۵'۹)$ ،  $(۱۴'۹)$ ،  $(۱۴'۲۲)$

(۲)  $(۶'۲)$ ،  $(۶'۱۴)$ ،  $(۱۶'۱۴)$ ،  $(۱۶'۲)$

پیمانہ  $\frac{1}{4}$  اینچ = ۱

۹ - ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو مرتبہ کرو اور ان کو ملانے

سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

$$(1) (0.60)' (0.40)' (20.0' 20.0')$$

$$(2) (8.14)' (8.13)' (5.13 - 5.13)$$

$$(3) (12.14)' (0.10 - 0.10)' (12.14 - 12.14)$$

پیمانہ  $\frac{1}{16}$  انچ = ۱

۱۰۔ ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

$$(1) (0.60)' (0.40)' (20.0' 20.0')$$

$$(2) (0.40)' (0.40)' (20.0' 20.0')$$

$$(3) (12.14)' (12.14)' (0.10 - 0.10)$$

$$(4) (20.0' 20.0)' (0.40)' (0.40 - 0.40)$$

۱۱۔ ذیل کی ہر صورت میں چار نقطوں کو ملانے سے جو ذواربعتہ الاضلاع بنے

اس کے اضلاع کے طول اور رقبہ دریافت کرو۔ پیمانہ ۱ انچ = ۱

$$(1) (2.35)' (2.35)' (1.15 - 1.15)' (1.15 - 1.15)$$

$$(2) (3.25)' (3.25)' (0.40)' (0.40)' (1.15 - 1.15)$$

$$(3) (12.14)' (12.14)' (0.10)' (0.10)' (0.10 - 0.10)$$

$$(4) (2.35)' (2.35)' (1.15)' (1.15)' (0.40 - 0.40)$$

$$(5) (2.35)' (2.35)' (0.40)' (0.40)' (1.15 - 1.15)$$

$$(6) (2.35)' (2.35)' (0.40)' (0.40)' (1.15 - 1.15)$$

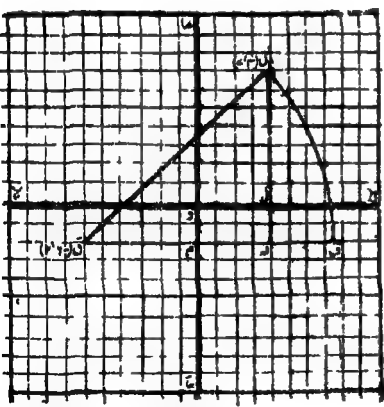
$$(7) (12.14)' (12.14)' (0.10)' (0.10)' (0.10 - 0.10)$$

۱۲۔ ذیل کی چار صورتوں میں نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے محدودے

گئے ہیں خطوط ا ج، ب د کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کر د اور ہر صورت میں ذواربعہ الاصلاع ا ب ج د کا رقبہ دریافت کرو۔

- (۱) ا (۱، ۲) ب (۲، ۲) ج (۱، ۱) د (۳، ۱)  
 (۲) ا (۲، ۳) ب (۳، ۳) ج (۳، ۱) د (۱، ۱)  
 (۳) ا (۱، ۱) ب (۲، ۲) ج (۳، ۳) د (۳، ۱)  
 (۴) ا (۲، ۳) ب (۳، ۳) ج (۳، ۱) د (۱، ۱)

۸۔ ایک مستقیم خط نقاط (۱، ۲) (۲، ۳) کو ملاتا ہے اس کا طول معلوم کرو۔



فاصلہ ن ق کی تقریبی قیمت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، نقطوں کو سرسٹھ کرنے کے بعد ق کو مرکز بنا کر ق ن کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو ق میں سے گزرنے والے

افقی خط سے ف پر ملے، ق ف = ۳، ۴ اکائیاں تقریباً جن دو نقطوں کے محدود دئے ہوئے ہوں ان کا باہمی

فاصلہ اُن محدودوں کی رقوم میں نظری طریق پر بھی معلوم ہو سکتا ہے

ن سے محور ما کے متوازی اور ق سے محور لا کے متوازی خطوط ن ر، ق ر کھینچو جو ایک دوسرے کو اوپر قطع کریں، اب ن ق ر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کے اضلاع کے مطلق طولوں میں یہ ربط ہے۔

$$ق ن^2 = ق ر^2 + ر ن^2$$

$$\text{لیکن } ق ر = ۴، ر ل = ۴، ق ل = ۴ - ۲ = ۲ = \text{فصلہ ن - فصلہ ق}$$

$$ر ن = ل ن + ر ل = ۴ + ۲ = ۶ = \text{معین ن - معین ق}$$

$$\therefore ق ن^2 = (\text{فصلہ ن - فصلہ ق})^2 + (\text{معین ن - معین ق})^2$$

$$۱۸۱ = ۴^2 + ۶^2 = \{۴ - ۲\}^2 + \{۶ - ۲\}^2 =$$

$$\therefore ق ن = \sqrt{۱۸۱} = ۱۳.۴۵ \dots$$

اور پیمائش سے  $۱۳.۴ \dots$

ہم نے اوپر دیکھا کہ اگر نقاط ن اور ق کے مہد معلوم ہوں تو

$$\text{فاصلہ ن ق}^2 = (\text{فصلہ ن - فصلہ ق})^2 + (\text{معین ن - معین ق})^2$$

$$\text{یعنی فاصلہ ن ق} = \sqrt{(\text{فصلہ ن - فصلہ ق})^2 + (\text{معین ن - معین ق})^2}$$

عام صورت میں محدودوں کو جبریہ حروف سے تعبیر کر کے ہم اس ضابطہ کو اگلی دفعہ میں ثابت کرینگے۔

۹۔ دو نقطوں کا باہمی فاصلہ اُن کے محدودوں کی رقوم میں

معلوم کرو۔

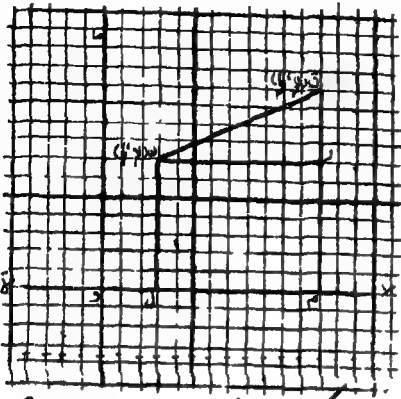
فرض کرو کہ مفروضہ

نقطے ن (لا، ما) اور

ق (لا، ما) ہیں اور

ان کا درمیانی فاصلہ

محدودوں کی رقوم میں مطلوب



ہے، لا لا پر عمود ن اور ق م کھینچو اور نقطہ ن سے ن ر محور لا کے متوازی کھینچو جو ق م سے ر پر ملے۔

$$تب \quad ن ق^2 = ن ر^2 + ر ق^2$$

$$اب \quad ن ر = ل م = و م - و ل = لا - لا$$

جو (فصلہ ق - فصلہ ن) کے مساوی ہے۔

$$اور \quad ر ق = م ق - م ر = ق - ل ن = ما - ما$$

جو (معین ق - معین ن) کے مساوی ہے

ن ر اور ر ق کو تبصیر کرنے والے جملے لا - لا اور ما - ما

ہر حالت میں یہی رہیں گے خواہ ن اور ق بلحاظ ایک دوسرے کے کہیں واقع ہوں۔

$$اس لئے \quad ن ق^2 = (لا - لا)^2 + (ما - ما)^2$$

$$یعنی \quad ن ق = \sqrt{(لا - لا)^2 + (ما - ما)^2}$$

$$یا \quad ن ق = \sqrt{(فصلہ ق - فصلہ ن)^2 + (معین ق - معین ن)^2}$$

فرع۔ اگر ن مبداء پر منطبق ہو یعنی لا = ۰ اور ما = ۰ =

$$تو\ وق = \sqrt{لا^2 + ما^2}$$

مشق ۱۔ نقاط (۱، ۲۵۵) اور ب (-۱، ۱۵۵) کا فاصلہ معلوم کرو۔

$$اب^2 = (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$= (-1 - 1) + (255 - 155)^2$$

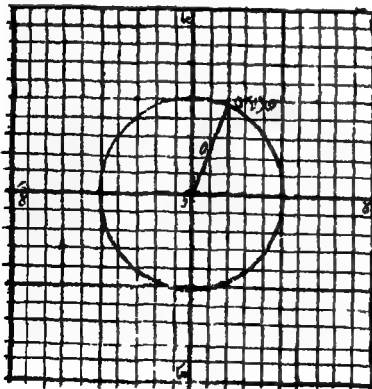
$$= 12525 + 25$$

$$= 12550$$

$$اس لئے اب = \sqrt{12550} = 353.5 \dots$$

طالب علم کو چاہیئے کہ ان نقطوں کو مربع دار کاغذ پر مرسم کرے اور پیمائش سے اس نتیجہ کی تصدیق کرے۔

مشق ۲۔ ایک نقطہ (لا، ما) ایک ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے جس کا مرکز مبداء ہے اور جس کا نصف قطر ۵ ہے، (لا، ما) کا باہمی ربط دریافت کرو۔



نقطہ ن دائرہ کے محیط پر خواہ کہیں واقع ہو اس کا فاصلہ مبداء (۰، ۰) سے ہمیشہ ۵ کے مساوی ہوگا۔



$$\text{اب فاصلہ ون} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 5$$

$$\text{یعنی } (-1)^2 + (-2)^2 = 5 = 25 \quad (1)$$

پس (۱) لازمی شرط ہے کہ نقطہ (۱، ۲) دائرہ مفروضہ کے محیط پر واقع ہو۔

رابط (۱) ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے جہاں نقطہ کے محدود لا اور ما دو مجہول مقداریں ہیں اور ظاہر ہے کہ محیط دائرہ کے ہر نقطے کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس لحاظ سے رابط (۱) کو ہم اس دائرہ کی مساوات کہہ سکتے ہیں۔

### ۱۔ مثلہ نمبری ۳

۱۔ جن نقطوں کے زوج ذیل میں مندرج ہیں ان کے باہمی فاصلے دریافت کرو۔

$$(1) (1, 2), (2, 5) \quad (2) (1, 2), (3, 4)$$

$$(3) (1, 2), (3, 4) \quad (4) (1, 2), (3, 4)$$

$$(5) (1, 2), (3, 4)$$

نیز ثابت کرو کہ یہ سب نقطے ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوئے ہیں

۲۔ ذیل کی ہر ایک صورت میں نقطوں کے جو زوج دے گئے ہیں ان کے باہمی فاصلے دریافت کرو۔

$$(1) (1, 2), (3, 4) \quad (2) (1, 2), (3, 4)$$

$$(3) (1, 2), (3, 4) \quad (4) (1, 2), (3, 4)$$

$$(5) (1, 2), (3, 4)$$

(۳) (۳۳، ۲۵) ، (۳۳، ۳۵) (۲۵، ۳۳)

۳۔ ثابت کرو کہ نقاط ذیل ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز (۷، ۷) ہے اور جس کا نصف قطر ۵ ہے۔

(۷، ۱۱) ، (۱۰، ۱۰) ، (۱۱، ۹) ، (۱۱، ۳) ، (۳، ۲) ، (۲، ۷)

۴۔ نقاط (۱۳، ۰) ، (۰، ۱۳) ، (۵، ۱۲) ، (۱۲، ۵) ، (۵، ۱۳) ، (۱۳، ۰)

(۵، ۱۲) ، (۱۲، ۵) کو مرسم کرو اور دکھاؤ کہ یہ سب کے سب ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں دائرہ کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو۔

۵۔ نقاط (۳، ۶) اور (۵، ۲) سے نقطہ (۱۰، ۱۸) کے فاصلہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ فاصلے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

۶۔ ایک جہاز کا مقام ایک روشنی گھر سے ۸ میل شمال اور ۶ میل مشرق کی طرف ہے اور ایک دوسرے جہاز کا مقام اسی روشنی گھر سے ۳ میل شمال اور چھ میل مغرب کی طرف ہے، دونوں جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو اور نیز معلوم کرو کہ پہلا جہاز روشنی گھر سے کتنی دور ہے۔

۷۔ ایک نقطہ (۱۱، ۱۱) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے جس کے مرکز اور نصف قطر ذیل میں مندرج ہیں۔

(۱) مرکز (۳، ۳) ، نصف قطر ۵

(۲) مرکز (۵، ۳) ، نصف قطر ۷

(۳) مرکز (۰، ۰) ، نصف قطر ۱

(۴) مرکز (۱، ۱) ، نصف قطر ۲

ہر صورت میں لا، ما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

## باب دوم

### خطی مساوات کی تشریم

۱۰۔ تفاعیل ہم جانتے ہیں کہ  $2 + 3$  ایک جملہ درجہ اول ہے جس میں صرف ایک جبریہ حرف لا شامل ہے اور باقی دو معلوم ہندسے ہیں۔

اس جملہ کی قیمت متعین نہیں ہو سکتی جب تک لا کی قیمت معلوم نہ ہو، اگر لا کی کوئی قیمت فرض کر لی جائے تو جملہ کی قیمت فوراً متعین ہو جاتی ہے۔ پس لا کے بدلنے یا مختلف قیمتیں اختیار کرنے سے یہ جملہ بھی مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے، مثلاً اگر ابتداً  $255 = لا$  تو جملہ  $2(لا + 3) = 8$ ، پھر اگر لا بدل کر  $3$  ہو جائے تو جملہ بدل کر  $9$  ہو جاتا ہے اسی طرح اگر لا مسلسل بدلتا جائے اور یہ قیمتیں

..... ۱-۲-۳، ۱-۲-۳، ۱-۲-۳، ..... سلسلہ وار اختیار کرے تو جملہ ۲+۳ بھی بدلیگا اور لا کی ان قیمتوں کے جواب میں حسب ذیل قیمتیں

..... ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹.....  
اختیار کرے گا۔

اس عمل میں لا اور ۲ لا + ۳ دونوں بدلتے ہیں یعنی متغیر ہیں باقی ۳، ۲ معلوم ہندسے ہیں، وہ نہیں بدلتے، ان کو اس لحاظ سے مستقل مقداریں کہتے ہیں۔

اب لا متغیر ہے اور ۲ لا + ۳ بھی، لیکن اگر ہم لا کو کوئی خاص قیمت دیں تو ۲ لا + ۳ کی قیمت فوراً متعین ہو جاتی ہے یعنی ۲ لا + ۳ کی قیمت لا کے تابع ہے، اسلئے ۲ لا + ۳ کو متغیر تابع کہتے ہیں اور لا کو متغیر متبوع۔ برعکس اس کے اگر ہم ۲ لا + ۳ کی قیمت پہلے مخصوص کر لیں تو لا کی قیمت مقرر ہو جائے گی، اس صورت میں تابع اور متبوع کا تعلق الٹ جائیگا، یہ صرف سہولت پر مبنی ہے کہ کس متغیر کو تابع مانا جائے اور کس کو متبوع۔ ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں اگر لا کو متغیر متبوع مانا جائے تو اس میں سہولت ہے۔

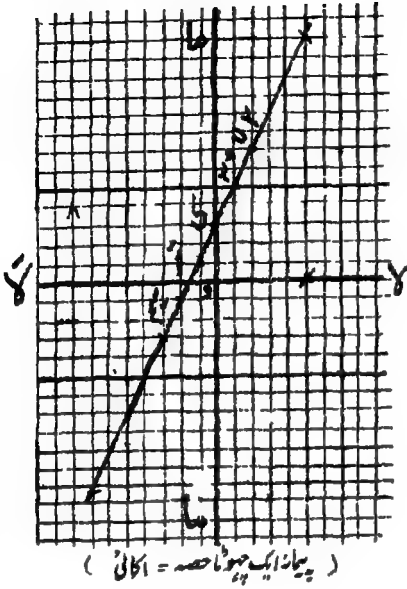
اد پر ہم نے ۲ لا + ۳ کو جملہ کہا ہے، اسلئے کہ طالب علم اس سے زیادہ مانوس ہوگا، لیکن جب متغیر مقداروں سے بحث ہو اور کسی جملہ اور اس کے متغیرات کی قیمتوں کا باہمی اختصار پیش نظر ہو تو ریاضی دان ۲ لا + ۳ کو "ایک ایسا جملہ جس میں لا شامل ہے" نہیں کہتے بلکہ اختصاراً اور دستوراً اس کو "فنکشن لا" یعنی لا کا تفاعل کہتے ہیں۔

جملہ مظہرات دنیا میں تبدیلی اور تغیر ہر طرف رونما ہے، جس دن سے تغیرات عالم کے متعلق فن ریاضی کے قوانین منضبط ہونا شروع ہوئے اس دن جدید ریاضی کی ابتدا ہوئی، تفاعل اور

اور متغیر آج کل ریاضی کے ہر رگ وریشہ میں بستہ اور پیوستہ ہیں۔  
تعریف - اگر ایک جملہ میں متغیر مقدار لا شامل ہو اور اس جملہ کی  
قیمت لا پر منحصر ہو تو اس کو لا کا تفاعل کہتے ہیں۔

مثلاً  $۲ لا + ۳$ ،  $۲ لا + ۴$ ،  $۵ لا + ۸$  وغیرہ میں سے ہر  
ایک لا کا تفاعل درجہ اول ہے، اسی طرح  $۲ لا + ۳$ ،  $۴ لا + ۲$ ،  
 $۵ لا + ۹$ ،  $۳ لا + ۵$ ،  $۲ لا + ۴$  وغیرہ بالترتیب  
لا کے تفاعل درجہ دوم، سوم، چہارم ہیں۔ یاد رہے کہ متغیر  
کی بڑی سے بڑی قوت تفاعل کے درجہ کو ظاہر کرتی ہے۔  
لا کے کسی تفاعل کو اختصار کی خاطر  $( لا )$  سے موسوم  
کرتے ہیں اور اس کو پڑھتے ہیں  $( لا )$  مثلاً  $( لا )$   
 $= ۲ لا + ۳$ ، یا  $( لا ) = لا + ۲ + ۵$  وغیرہ  
وغیرہ جس سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل مذکورہ  
متغیر ہیں اور ان کی قیمتیں لا پر موقوف ہیں اور صرف اسی پر  
تفاعل کی تربیت ہم جانتے ہیں کہ تفاعل درجہ اول  $۲ لا + ۳$   
کی قیمت لا پر منحصر ہے اور لا کو بند ریمج عددی قیمتیں دینے سے  
 $۲ لا + ۳$  کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔ ان میں سے چند  
جدول ذیل میں مندرج ہیں۔ طالب علم اس جدول کی توسیع  
جس قدر چاہے کر سکتا ہے۔

....	۲	۱	۰	۱-	۲-	۳-	= لا
....	۷	۵	۳	۱+	۱-	۳-	تفاعل $۲ لا + ۳$



ان میں سے لا  
کی کسی ایک قیمت  
مثلاً ۱، کو فصلہ  
اور تفاعل کی  
متناظر قیمت ۱ + ۱ کو  
معیّن مان کر کسی مستوی  
سطح پر ایک نقطہ  
ترسیم کرو۔ اس طرح  
سے لا اور ۲ لا + ۳  
کی متناظر قیمتوں کے

مختلف زوجوں سے سطح مستوی پر بے شمار نقطے حاصل  
ہوتے ہیں جن میں سے چند شکل بالا میں دکھائے گئے  
ہیں۔ ان بے شمار نقطوں کو ملانے والا خط تفاعل ۲ لا + ۳  
کی ترسیم کہلاتا ہے۔

جدول بالا میں اگر لا کی قیمتیں ایک دوسرے کے بالکل قریب  
قریب لی جائیں تو طالب علم اس کی تصدیق کر سکتا ہے کہ سطح مستوی پر  
جو نقطے ان کے جواب میں حاصل ہونگے وہ ایک دوسرے کے نہایت  
قریب قریب واقع ہونگے اور ترسیم مطلوبہ مسلسل ہوگی۔

۱۱۔ مساواتیں۔ دو جبریہ جملوں کے باہم مساوی ہونے سے  
جبریہ مساوات پیدا ہوتی ہے، عام طور پر ان جملوں کی تسام  
رقوں کو ایک طرف منتقل کر دیتے ہیں اور علامت تساوی

کے دوسری طرف صفر رہ جاتا ہے مثلاً  $۳ لا + ۲ = ۰$  اور  
 $۲ لا + ۳ لا + ۳ = ۰$  وغیرہ وغیرہ ان مساواتوں میں  $۲، ۳، ۳$   
 وغیرہ معلوم مقداریں ہیں اور  $لا$  وغیرہ کو مجہول مقداریں کہتے ہیں۔  
 مجہول مقداریں طبیعی یا ہندسی مقادیر ہو سکتی ہیں مثلاً طول  
 حجم، تیش، دباؤ، نقطہ کے محدود وغیرہ وغیرہ۔  
 مثلاً فرض کرو کہ ایک میز کے طول کا  $۵$  گنا  $۸$  فٹ ہے

تو  $۵ \times$  میز کا طول  $= ۸$  فٹ

یعنی میز کا طول  $= \frac{۸}{۵}$  فٹ

اگر اختصار کی خاطر میز کے طول کی جگہ ہم کوئی جبریہ حرف لا لیں

تو مساوات ہو جائے گی  $۵ لا = ۸$  فٹ یعنی  $لا = \frac{۸}{۵}$  فٹ

نوٹ۔ طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ ابھی لا مجہول مقدار تھی اور ابھی  
 یہ معلوم مقداروں کی رقوم میں معلوم ہو گئی۔

مجہول مقدار مساوات کے درجہ اور مرتبہ کو ظاہر کرتی ہے۔  
 مساوات درجہ اول میں مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی  
 قوت ایک ہوتی ہے، مثلاً ایک مجہول مقدار کی مساوات  
 درجہ اول  $۲ لا + ۳ = ۰$  ہے اور دو مجہول مقداروں کی مساوات  
 درجہ اول  $۳ لا + ۴ ما + ۵ = ۰$  ہے۔ اسی طرح سے ایک  
 مجہول مقدار کی مساوات درجہ دوم  $۲ لا + ۳ لا + ۴ = ۰$   
 ہے وغیرہ وغیرہ۔

مساوات کے حل سے یہ مراد ہے کہ مجہول مقداروں کی  
 قیمت معلوم مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائے اور

یہ قیمت ایسی ہو کہ مساوات میں مجہول مقدار کی جگہ اس کو مندرج کرنے سے طرفین مساوات برابر ہو جائیں (یعنی مساوات پوری ہو جائے)

اب مساوات درجہ اول  $2x + 3 = 0$  کو حل کرنے

سے  $2x = -3$  اس مساوات میں اگر  $x$  کی بجائے  $\frac{3}{2}$  لکھا

جائے  $\{2 \times (\frac{3}{2}) - 3 = 0\}$  تو مساوات پوری ہو جاتی ہے

اور ظاہر ہے کہ سوائے  $\frac{3}{2}$  کے اگر کوئی اور عدد  $x$  کی بجائے

مساوات میں رکھا جائے تو مساوات پوری نہیں ہوتی، اس کو

بعض اوقات مساوات کی اصل کہتے ہیں۔

اب مساوات  $2x + 3 = 0$  کو، اس میں دو مجہول

مقداریں  $x$  اور  $3$  شامل ہیں اور مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی

قوت اس میں ایک ہے، آئندہ ہم اس کو دو مجہول مقداروں

کی مساوات درجہ اول یا مختصراً خطی مساوات کہیں گے،

اس کے نام کی وجہ تسمیہ آگے چلکر معلوم ہوگی۔ اس مساوات

کے حل سے یہ مراد ہوگی کہ مجہول مقادیر  $x$  اور  $3$  کی قیمتیں معلوم

مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائیں اور پھر اگر ان قیمتوں کو

مساوات میں  $x$  اور  $3$  کی بجائے رکھا جائے تو مساوات پوری ہو جائے

ان قیمتوں کے معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات کو اس

صورت میں لکھتے ہیں  $= \frac{2x + 3}{2}$  جس میں مجہول مقدار کا

ایک تفاعل درجہ اول  $= \frac{2x + 3}{2}$  کے مساوی ہے اور  $x$  کی

مختلف قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جو قیمتیں ہوں گی وہی  $x$  کی



قیمتیں ہونگی۔

پس اس مساوات کے حل معلوم کرنے کے لئے  $= ۲ - \frac{۲+۱}{۳}$  میں

فرض کر دو کہ  $۱ = لا$  تو  $= ۲ - \frac{۲+۱}{۳}$  پس  $۲ = لا$  +  $۱$  ایک حل ہے

”  $۱ = لا$  تو  $= ۲ - \frac{۲+\frac{۱}{۳}}{۳}$  ”  $\frac{۱۳}{۹} = لا$  ”  $\frac{۱۳}{۹} = لا$  ایک اور حل ہے

”  $۳ = لا$  تو  $= ۲ - \frac{۲+۳}{۳}$  ”  $\frac{۲}{۳} = لا$  ”  $\frac{۲}{۳} = لا$  ”

اور ظاہر ہے کہ یہ حل مساوات کو پورا کرتے ہیں مثلاً  $۱ = لا$ ،  $۲ = لا$  اور

مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ  $۲ + ۱ \times ۲ = ۳ + ۲ \times ۱ = ۴$  اور

اسی طرح اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ باقی سب حل مساوات

کو پورا کرتے ہیں۔

اس عمل سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم  $لا$  کو کسی مثبت، منفی

صحیح عدد یا کسر کے مساوی فرض کریں اس کے جواب میں  $ما$  کی

ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور  $لا$ ،  $ما$  کی قیمتوں کا یہ جوڑا

مساوات کو پورا کرتا ہے، پس معلوم ہوا کہ اس مساوات کے بیشتر

حل ہیں، ان میں سے چند جدول ذیل میں دے گئے ہیں۔

$$۲ + لا = ۲ + ۱ \times ۲ = ۴ \quad یا \quad ۲ + لا = ۲ + ۳ \times ۱ = ۵$$

.....	۳	۲	$\frac{۵}{۹}$	۱	-	$\frac{۲}{۳}$	۱-	۲-	لا
.....	$\frac{۱۰}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۱۶}{۹}$	۲	-	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۹}$	$\frac{۲}{۳}$	ما

پس دو جدول مقداروں کی مساوات درجہ اول  $۳ + لا = ۳ + ۱ \times ۲ = ۵$  کے حل

$\{ \begin{matrix} ۱۲ = ۱۱ \\ ۱۱ = ۱۰ \\ ۱۰ = ۹ \end{matrix} \}$ ،  $\{ \begin{matrix} ۱۱ = ۱۰ \\ ۱۰ = ۹ \\ ۹ = ۸ \end{matrix} \}$ ،  $\{ \begin{matrix} ۱۰ = ۹ \\ ۹ = ۸ \\ ۸ = ۷ \end{matrix} \}$  وغیرہ وغیرہ میں اور یہ تعداد میں پیشاں ہیں۔  
 اب ہر ایک حل کے لاء کی قیمت کو فصل اور مائی قیمت کو معین مان کر  
 ایک مستوی سطح پر بلحاظ دو ثابت محوروں کے ایک ایک نقطہ مرتسم کرو اس طرح  
 سے مساوات کے پیشاں سطحوں سے پیشاں نقطے حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں  
 کو ملانے والا خط اس مساوات کی ترسیم کہلاتا ہے۔

نوٹ۔ قبل ازیں ہم نے لاء کو جموں مقداریں کہا ہے، جدول بالا سے ظاہر ہے  
 کہ اس مساوات میں لاء بتدریج مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اور ان کے جواب میں  
 مائی قیمتیں متعین ہو جاتی ہیں۔ پس اس مساوات میں ہم لاء کو دو متغیر مقدار  
 خیال کر سکتے ہیں۔ آئندہ ایسی مساوات کو ہم دو متغیروں کی مساوات درجہ اول بھی کہیں گے۔

پس مساوات  $۱۲ = ۱۱ + ۱۰ + ۹ = ۳۰$  یعنی  $۱۲ = ۳۰$  کی ترسیم بنانے میں ہم  
 لاء کی کسی قیمت کو فصل اور مائی تناظر قیمت کو معین فرض کر کے نقطے مرتسم کرتے ہیں  
 اور حسب دفعہ ۱۰ تفاعل -  $\frac{۱۲}{۳۰}$  کی ترسیم بنانے میں ہم لاء کی  
 کسی قیمت کو فصل اور تفاعل -  $\frac{۱۲}{۳۰}$  کی تناظر قیمت کو معین  
 فرض کر کے نقطے حاصل کرتے ہیں۔

پس اگر فصل (یعنی لاء) دونوں صورتوں میں ایک ہی ہو تو  
 ایک صورت میں معین مائی کے مساوی ہے اور دوسری صورت  
 میں -  $\frac{۱۲}{۳۰}$  کے، لیکن یہ دونوں لاء کی تمام قیمتوں کے  
 لئے ایک دوسرے کے مساوی ہیں کیونکہ  $۱۲ = ۳۰$ ۔  
 پس دونوں صورتوں میں اگر فصل مساوی ہوں تو معین بھی

مساوی ہوتے ہیں یعنی دونوں صورتوں میں نقاط مستحصلہ وہی ہیں، پس معلوم ہوا کہ مساوات  $۲ + لا + ۳ = ۴ + ۱ = ۰$  کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل  $۲ + لا + ۳$  کی ہے۔

عام طور پر اگر ف (لا) کا کوئی تفاعل ہو تو اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات  $۴ = ف (لا)$  کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل ف (لا) کی ہے کیونکہ اگر دونوں صورتوں میں لا کی ایک ہی قیمت کو فصلہ مانا جائے تو ایک صورت میں معین ما ہوگا اور دوسری صورت میں ف (لا) اور یہ دونوں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ دفعہ ۱۰ میں ہم نے تفاعل  $۲ + لا + ۳$  کی ترسیم بنائی ہے، ظاہر ہے کہ مساوات  $۴ = ۲ + لا + ۳$  یعنی  $۲ + لا = ۴ - ۳ = ۱ = ۰$  کی ترسیم بھی وہی خط ہے جو تفاعل  $۲ + لا + ۳$  کی ترسیم ہے۔

۱۲۔ مختصر ترسیم ایک ایسا مستقیم یا منحنی خط ہے جو نقطوں کے ایک سلسلہ میں سے کھینچا گیا ہو جن کے مقامات پہلے سے معلوم کر لئے گئے ہوں، بعض اوقات یہ نقطے طبعی مقادیر کو بطور فصلہ اور معین مرسم کرنے سے حاصل ہو گئے، اس کی مثالیں ہمیں اگلے باب میں طینگی، فی الحال ہم اُن نقطوں کے مقامات دو متغیروں کی مساوات درجہ اول (خطی مساوات) سے حاصل کریں گے۔

ایسی مساوات کی مختلف عددی صورتیں یہ ہو سکتی ہیں

$$لا - ۱۱ = ۰$$

$$0 = 9 - 6$$

$$0 = 3 + 6$$

وغیرہ وغیرہ

$$0 = 10 - 62 - 3$$

ہم آئندہ دفعات میں ان کی ترسیمیں بنائیں گے اور ان پر بالتفصیل بحث کریں گے۔

۱۳ - لا = ۱۱ اور ما = ۹ کی ترسیمیں

لا = ۱۱ اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ لا + ۰ × ما - ۱۱ = ۰ یعنی یہ خطی مساوات کی خاص صورت ہے جس میں ما کا سر صفر ہے۔

اب اس مساوات کی ترسیم بنانے کے لئے ہمیں اس کے حل معلوم کرنے چاہئیں، اس مساوات کی اس شکل لا + ۰ × ما - ۱۱ = ۰ سے ظاہر ہے کہ ما کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو لا کی قیمت ۱۱ اس کو پورا کرتی ہے۔

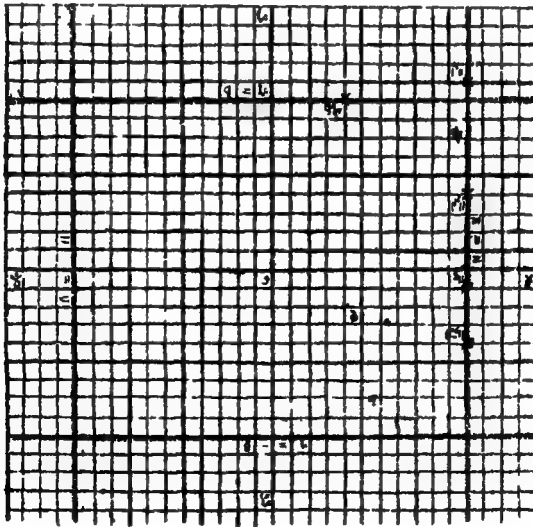
پس مساوات کے حل لا = ۱۱، لا = ۱۱، لا = ۱۱، لا = ۱۱ وغیرہ وغیرہ

ہیں ان میں لا کی قیمت ہمیشہ ۱۱ کے مساوی ہے لیکن ما کی قیمت جو ہم چاہیں ہو سکتی ہے۔

اب حسب سابق ہر حل کے لا کو فصلہ اور ما کو معین مان کر ہم شکل ذیل میں نقطے مرتسم کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ان کو ملا کر سے ایک مستقیم خط حاصل ہوتا ہے جو محور ما و ما کے متوازی ہے اور اس کے دائیں جانب ۱۱ اکائیوں کے فاصلہ پر واقع ہے، طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ مساوات کے کسی اور حل مثلاً

(۱۱-۷) سے جو نقطہ حاصل ہوتا ہے وہ بھی اسی خط پر واقع ہے اور برعکس اس کے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں، یہ مستقیم خط مساوات  $لا = ۱۱$  کی ترسیم ہے۔ اسی طرح  $لا = ۱۱$  ایک ایسے مستقیم خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے ۱۱ اکائیاں بائیں جانب واقع ہے۔

پس عام طور پر مساوات  $لا = ۱۱$  جہاں ۱ مستقل مقدار ہے ایک ایسے مستقیم خط کو تعبیر کرتی ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ۱۱ پر واقع ہے، خود محور ما کی مساوات  $لا = ۰$  ہے۔



مساوات  $ما = ۹$  کو شکل  $۰ \times لا + ما = ۹$  میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خطی مساوات کی ایک خاص صورت ہے جس میں لا کا سر صفر ہے اور اس کے حلوں سے نقاط ذیل حاصل ہوتے ہیں

(-۹،۵) (۹،۳) (۹،۱۰)-----

ان میں سے ہر نقطہ کا ماحدو یعنی معین ۹ اکائیوں کے مساوی ہے اور فاصلہ کی کچھ ہی قیمت ہو سکتی ہے، ان نقطوں کو مرتب کرنے سے ایک خط محور لا کے متوازی حاصل ہوتا ہے جسکا فاصلہ محور لا سے اوپر کی طرف ۹ اکائیوں کے مساوی ہے، یہ خط مساوات  $ما = ۹$  کی ترسیم ہے، اسی طرح  $ما = -۹$  کی ترسیم ایک ایسا خط مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور ۹ اکائیاں اس کے نیچے کی طرف واقع ہے، دیکھو شکل۔

عام طور پر  $ما = ب$  جہاں ب ایک مستقل مقدار ہے ایک ایسے مستقیم خط کی مساوات ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ب پر واقع ہے۔ خود محور لا کی مساوات  $ما = ۰$  ہے۔

۱۴۔ اس دفعہ میں ہم ایسی مساواتوں کی ترسیمیں معلوم کریں گے جو ذیل میں مندرج ہیں

ما - لا = ۰، ما - ۲ لا = ۰، ما - ۳ لا = ۰، ۲ ما - لا = ۰، ۳ ما + ۲ لا = ۰۔

ان میں سے ہر ایک دو متغیروں لا، ما کی مساوات درجہ اول ہے اور رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں مجهول مقدار یا متغیر شامل نہ ہو کسی مساوات میں موجود نہیں ہے، یہ مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

ما = لا، ما = ۲ لا، ما = ۳ لا، ما = ۲ لا، ۲ ما = لا، ۳ ما = ۲ لا،

جہاں ما کا سر ایک ہے اور لا کا سر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد

یا کسر ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ ان مساواتوں کی ترسیمیں وہی ہیں جو بالترتیب تفہیل  
'لا'، '۳ لا'، '۱/۲ لا'، '۱/۳ لا'، ..... کی ہیں کیونکہ لا کے  
بدلنے سے ان تفاضلوں کی جو قیمتیں حاصل ہونگی وہی ما کی قیمتیں  
ہونگی۔ ذیل کی مشقوں کو طالب علم خود مربع دار کاغذ پر حل کرے۔

(۱) مساوات  $ما = لا$  کی ترسیم

اس میں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی متناظر قیمتیں  
معلوم ہو سکتی ہیں، ظاہر ہے کہ یہ قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی  
ہونگی اور ان سے جو نقطے حاصل ہونگے ان میں سے ہر ایک کا  
فضلہ اس کے معین کے مساوی ہوگا۔

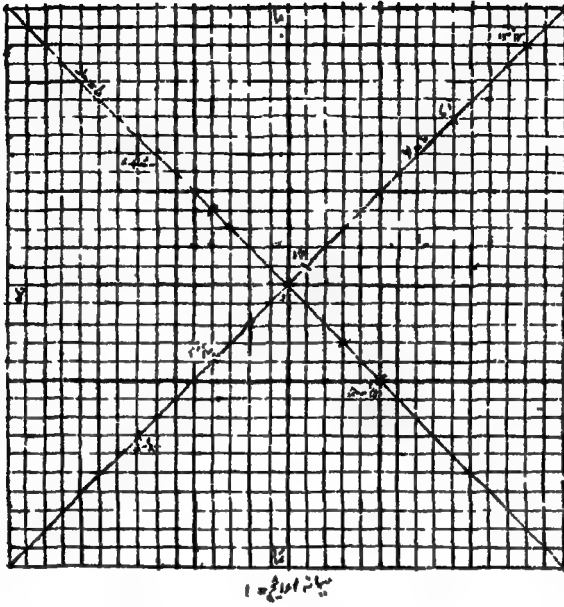
(-۱، -۱)، (-۲، -۲)، (-۳، -۳)، (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۵، ۵)، (۱۳، ۱۳)۔

اگلے صفحہ کی شکل میں ان نقطوں کو مرسم کیا گیا ہے، ظاہر ہے  
کہ یہ سب نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

مناسب ہوگا کہ کسی مساوات کی ترسیم بناتے وقت  
طالب علم لا اور ما کی قیمتوں کو ایک جدول کی شکل میں  
اس طرح لکھ لے۔

.....	۱۳	۵	۱	۰	-۳	-۱	= لا
.....	۱۳	۵	۱	۰	-۳	-۱	= ما

اگر مساوات  $ما = لا$  میں لا کی کوئی اور قیمت مثلاً -۸ فرض کریں



تو اس کے جواب میں ما کی قیمت ۸- حاصل ہوتی ہے یعنی اس مساوات سے لا، ما کی قیمتوں کا ایک اور زوج یعنی ایک اور نقطہ (۸-، ۸-) حاصل ہوتا ہے، اس کو مرسم کرنے پر معلوم ہوگا کہ یہ بھی اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اسی طرح ہر ایک نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اس کے باہر کہیں واقع نہیں ہو سکتا۔

پس اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے جو مبدأ میں سے گذرتا ہے اور ربات اول اور سوم کی تقصیف کرتا ہے یعنی اس خط کے اوپر کی سمت محور لا کی مثبت سمت سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔

اب اس خط پر کوئی نقطہ ن لو، اس کے مجدد (۹، ۹) معلوم کرو



یہ محدود مساوات  $ما = لا$  کو پورا کرتے ہیں، اسی طرح اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔  
پس مساوات سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ سب کے سب اس خط پر واقع ہیں اور اس خط پر کے سب نقطے مساوات کو پورا کرتے ہیں، یعنی اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے اور اس خط کی مساوات  $ما = لا$  ہے، پس اس خط کا جبر یہ نام ہم  $ما = لا$  رکھ سکتے ہیں۔

مساوات  $ما = لا$  کی ترسیم بھی اسی طرح حاصل ہو سکتی ہے، مساوات  $ما = لا$  میں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے  $ما$  کی جو متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں دی گئی ہیں

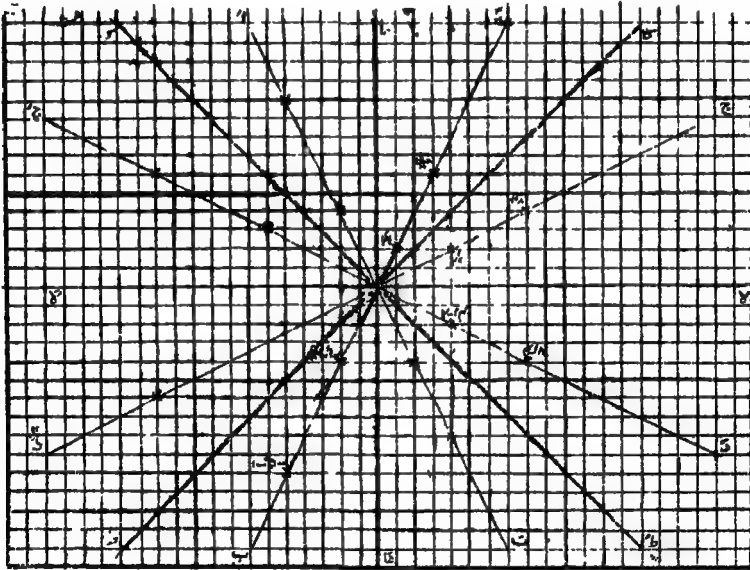
.....	$ما = لا$	۳	۵	$ما = ۴$	$ما = ۷$
.....	$ما = ۱$	$ما = ۳$	$ما = ۵$	۴	۷

نقاط (۰، ۰)، (۲، ۲) وغیرہ کو شکل صفحہ ۵۴ میں مرسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرتا ہے اور ربعات دوم و چارم کی تنصیف کرتا ہے، پس مساوات  $ما = لا$  کی ترسیم یہ خط ہے اور اس خط کا جبر یہ نام  $ما = لا$  ہے۔

(ب) مساوات  $ما = ۲ لا$  کی ترسیم  
اس مساوات میں لا کو مثبت، منفی قیمتیں دینے سے  
ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرد اور ان کو جدول کی صورت میں لکھو

.....	۵ -	۲ -	۴	۳	۱	۰	لا =
.....	۱۰ -	۴ -	۱۴	۶	۲	۰	ما =

حسب معمول ان نقطوں (۰،۰)، (۲،۱)، (۳،۲) وغیرہ کو مرسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے اور ربعات اول واسوم میں واقع ہے۔



ما = ۲ لا کے ساتھ کی مساوات ما = ۲ - لا ہے، اس کی ترسیم بنانے کے لئے جدول ذیل ہے

.....	۵ -	۲ -	۴	۲	۰ = لا
.....	۱	۴ +	۸ -	۴ -	۰ = ما

ان نقطوں (۲،-۴)، (۴،-۸)، (۸،-۴) وغیرہ کو مرسم کرنے سے

معلوم ہوتا ہے کہ ان کو لانے والا خط بھی مستقیم ہے، مبدأ میں سے گزرتا ہے اور ربعات دوم و چہارم میں واقع ہے، پس یہ خط اس مساوات کی ترسیم ہے دیکھو شکل بالا۔

شکل سے معلوم ہو گا کہ  $۲ = ۱$  لا کی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ برابر ہے اس زاویہ کے جو  $۲ = ۱$  لا کی ترسیم محور لا کی منفی سمت کے ساتھ بناتی ہے یعنی  $۱ = ۲$  لا اور  $۱ = ۲$  لا

یعنی  $۲ = ۱$  لا اور  $۱ = ۲$  لا کی ترسیمیں محور ما کی متقابل جانبوں میں اس سے مساوی زاوے بناتی ہیں

یا مختصراً محور ما میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے،

شکل بالا میں  $\begin{cases} ۱ = ۲ \\ ۲ = ۱ \end{cases}$  کی ترسیمیں بنائی گئی ہیں۔

یہ مساواتیں اس طرح  $\frac{۱}{۲} = ۱$  لا  $\frac{۱}{۲} = ۱$  لا لکھی جاسکتی ہیں جہاں ما کا

سر ایک ہے اور یہ اکیلا مساوات کے ایک طرف ہے اور لا اور اس کا عددی سر دوسری طرف ہے، یہ مساوات کی معیاری صورت ہے۔

ان مساواتوں کی متعلقہ جدولیں یہ ہیں

$\frac{۱}{۲} = ۱$  لا

$\frac{۱}{۲} = ۱$  لا

....	۶ =	۸	۴	۱ = لا
....	۳	۴	۲ =	۱ = لا

....	۱۲ =	۸	۴	۱ = لا
....	۶ =	۴	۲	۱ = لا

ان نقطوں کو شکل میں مرتب کیا گیا ہے، ان کے ملانے والے خط مستقیم ہیں اور مبدأ میں سے گزرتے ہیں۔

طالب علم شکل سے دیکھے کہ  $ما = \frac{1}{4} لا$  کی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی مثبت سمت (دلا) کے ساتھ  $ما = لا$  کی ترسیم کے زاویہ میلان سے کم ہے اور  $ما = لا$  کا زاویہ  $ما = ۲ لا$  کے

زاویہ سے کم ہے یعنی زاویہ ج دلا  $>$  زاویہ س دلا  $>$  زاویہ ا دلا اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جیسے لا کا سر تقدا بڑھتا ہے

خط کا زاویہ میلان بھی بڑھتا جاتا ہے اور ترسیمی خط رنج اول میں زیادہ اونچا ہوتا جاتا ہے، اسی طرح مساواتوں

$$ما = \frac{1}{4} لا، ما = لا، ما = ۲ لا$$

کی ترسیموں کے مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ جیسے لا کا سر تقدا بڑھتا جاتا ہے ترسیموں کے زوایا میلان محور لا کی منفی سمت (دلا) کے ساتھ بالترتیب بڑھتے جاتے ہیں اور ترسیمیں رنج دوم میں اونچی ہوتی جاتی ہیں۔

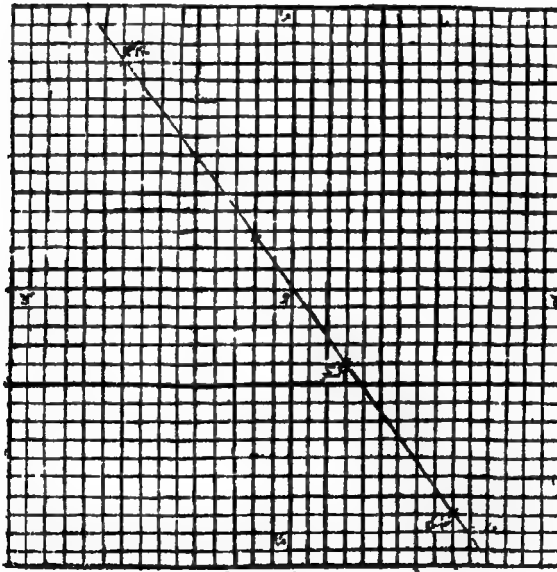
(ج) مساوات  $۳ ما + لا = ۰$  کی ترسیم مناسب بیانہ کے انتخاب کی خاطر ہم اس مثال کو حل کرتے ہیں، اس مساوات کی معیاری صورت

$$ما = -\frac{۳}{۴} لا$$

$$ما = -\frac{۳}{۴} لا$$

.....	۳ -	۲ -	۳	۱	لا
.....	۴	$۲ \frac{۳}{۴}$	۴ -	$\frac{۳}{۴} -$	ما

اب تک ہم نے چھوٹے حصہ کو اکائی مانا ہے ، لیکن موجودہ صورت میں ہمیں ایسے طول ناپنے پڑینگے جن کے نسب نماؤں میں ۳ واقع ہوتا ہے جیسے -  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{1}{3}$  وغیرہ وغیرہ اس لئے اگر ہم تین چھوٹے حصوں کو اکائی مانیں یعنی ۳ چھوٹے حصے = ۱ تو چھوٹا حصہ  $\frac{1}{3}$  کے مساوی ہوگا ، پس - پہلے ناپنے کے لئے ہمیں منفی سمت میں ۳ چھوٹے حصے جانا پڑے گا اور  $\frac{1}{3}$  کے لئے مثبت سمت میں ۸ چھوٹے حصے ، اس پیمانہ پر شکل ذیل بنائی گئی ہے



پیمانہ ۳۲ انچ ۱۰

پس مساوات  $y = -x + 3$  کی ترسیم مبدأ میں سے گزرنے والا ایک خط ہے جو ربات دوم و چہارم میں واقع ہے اور  $y = -x$  کے ترسیمی خط سے اونچا ہے -

مساوات  $y = \frac{1}{2}x$  کی ترسیم اوپر کے خط کا عکس ہوگی محور ما

میں اور اس پر یہ نقطے واقع ہونگے

(۱-۱) (۲-۲) (۳-۳) (۴-۴) (۵-۵) (۶-۶) (۷-۷) (۸-۸) (۹-۹) (۱۰-۱۰) وغیرہ  
نوٹ نقطہ (۳-۳) کا عکس محور ما میں نقطہ (۳، ۳) ہوگا  
اور اسی نقطہ کا عکس محور لا میں (۳، -۳) ہوگا، اوپر کے  
نقطے خط ما = ۰ لا کے نقطوں میں فاصلوں کی علامات بدلنے سے  
حاصل کئے گئے ہیں۔

۱۵۔ دفعہ آخر میں ہم نے ان مساواتوں

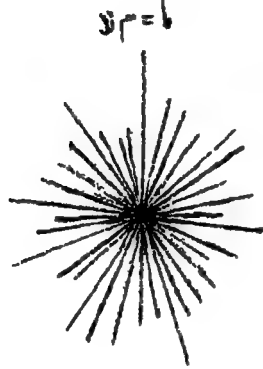
$$\left\{ \begin{array}{l} ۰ = ۳ - ۱ \\ ۰ = ۳ + ۱ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ۰ = ۲ - ۱ \\ ۰ = ۲ + ۱ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ۰ = ۱ - ۱ \\ ۰ = ۱ + ۱ \end{array} \right\}$$

کو مرتب کیا۔ ان میں سے ہر ایک دو متغیروں کی مساوات درجہ  
اول ہے جس میں رقم مطلق موجود نہیں اور ہر ایک مناسب  
عمل کے بعد اس شکل میں لائی جاسکتی ہے  $۰ = م$  (ایک عدد)  $\times لا$   
یعنی  $۰ = م لا$  جہاں م ایک مستقل مقدار ہے، م کو مختلف قیمتیں  
۱، -۱، ۲، -۲، ۳، -۳، ۴، -۴، ۵، -۵، ۶، -۶، ۷، -۷، ۸، -۸، ۹، -۹، ۱۰، -۱۰ دینے سے  
ہم اوپر کی سب مساواتیں اور اسی طرح کی اور سب مساواتیں  
حاصل کر سکتے ہیں، پس اس قبیل کی مساواتوں کی عام سے عام  
شکل  $۰ = م لا$  ہے۔

اوپر ہم نے کہا ہے کہ م ایک مستقل مقدار ہے، واضح  
ہو کہ م کسی ایک مساوات اور اس کی ترسیم کے لئے مستقل  
ہے، مثلاً فرض کیا کہ  $۰ = م$  تو مساوات  $۰ = م لا$  لا حاصل  
ہوتی ہے، اس کی ترسیم بناتے وقت لا اور ما بدلتے ہیں مگر م

کی قیمت  $\frac{1}{2}$  اس مساوات کی ترسیم بناتے وقت نہیں بدلتی۔  
لیکن مختلف ترسیمیں حاصل کرنے کے لئے  $m$  کی قیمت  
بدلتی ہے، مثلاً اگر  $m$  کی قیمت  $\frac{1}{2}$  ہو تو ایک ترسیم  
حاصل ہوتی ہے، اگر

—  $\frac{1}{2}$  ہو تو دوسری  
وغیرہ وغیرہ



اب ظاہر ہے کہ  
مساوات  $m = \frac{1}{2}$  میں  $m$  کی بے شمار  
عددی قیمتوں کے  
جواب میں مبداء میں  
سے گزرنے والے

۱۷ شمار خط حاصل ہوتے ہیں، ان میں سے چند ساتھ کی  
شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

اجمالی طور پر ہم مساوات  $m = \frac{1}{2}$  اور اس کی ہندسی تعبیر  
کے باہمی تعلقات کو ذیل میں درج کرتے ہیں

ہندسی تعبیر

جبریتہ ربط

ہر صورت میں اس کی ترسیم	$m = \frac{1}{2}$ دو مستغیروں کی مساوات
مستقیم خط ہے	درجہ اول ہے
اس کی ترسیم پر بے شمار نقطے ہیں۔	مساوات $m = \frac{1}{2}$ کے ہر شمار میں

مساوات  $ما = م لا$  میں رقم  
مطلق موجود نہیں  
اس کی ترسیم ہمیشہ مبداً میں سے  
گزرتی ہے۔

مساوات  $ما = م لا$  میں  $م$  مثبت  
ہے مثلاً  $(\frac{1}{4})$   
اس کی ترسیم ربعات اول اور سوم میں  
واقع ہوتی ہے یعنی محور لا کی مثبت  
سمت ولا کے ساتھ حادہ زاویہ  
بناتی ہے

مساوات  $ما = م لا$  میں  $م$  منفی  
ہے مثلاً  $(-\frac{1}{4})$   
اس کی ترسیم ربعات دوم و چہارم  
میں واقع ہوتی ہے یعنی محور لا کی منفی  
سمت ولا کے ساتھ حادہ زاویہ  
بناتی ہے۔

اگر مساوات  $ما = م لا$  میں  $م$  مثبت  
ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی  
جائے  
تو اس کی ترسیم کا زاویہ میلان ولا  
کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے

اگر مساوات  $ما = م لا$  میں  $م$  منفی  
ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی جائے  
مساوات  $ما = م لا$  اور  $ما = -م لا$   
کے مساوی اور مختلف علامت ہیں  
ان کی ترسیمیں محورها میں ایک دوسرے  
کا عکس ہیں۔

۱۶۔ اب ہم دو متغیروں کی ایسی مساوات درجہ اول  
کی ترسیم معلوم کرتے ہیں جس میں مطلق یا مستقل رقم موجود ہو

ایسی چند مساواتیں یہ ہیں {  $۲ + لا = ۴$  ،  $۲ + لا = ۱۰$  ،  $۲ - لا = ۴$  ،  $۲ - لا = ۱۰$  وغیرہ وغیرہ



اور یہ بالترتیب اس طرح لکھی جاسکتی ہیں  $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$ ،  $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$ ،  $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$  وغیرہ وغیرہ

یعنی ما اکیلا ایک طرف ہے اور لا (مع اپنے سر کے) اور مستقل رقم دوسری طرف، یہ مساوات کی معیاری صورت ہے۔

اگر بموجب سابق لا کے سر کو ہم سے تعبیر کریں اور مستقل رقم کو ج سے تو اوپر کی ہر مساوات اور اس طرح کی اور سب

مساواتیں اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں

$$ما = لا + ج$$

اب ہم ایسی مساواتوں کی ترسییں معلوم کرتے ہیں۔

$$(۱) \quad ۲ - ما = ۱۰ - لا \quad \text{کی ترسیم}$$

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے  $۱۰ + لا = ۲ + ما$  یا  $۲ + لا = ۵$  جو معیاری صورت ہے۔

مساوات  $۲ + لا = ۵$  کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل  $۲ + لا = ۵$  کی کیونکہ لا کی مختلف قیمتوں کے لئے ما اور تفاعل

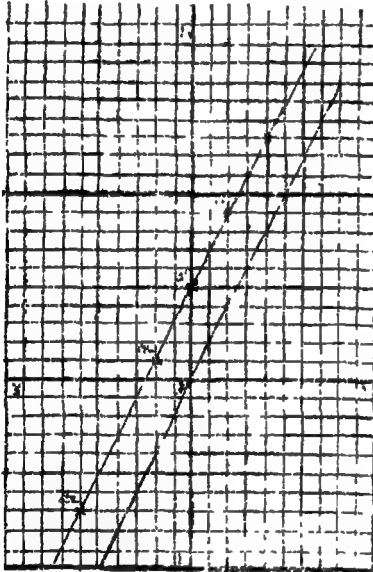
$۲ + لا$  کی قیمتیں مساوی ہیں۔

لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی قیمتیں نکالو اور ان سے جدول مرتب کرو

$$۲ + لا = ۵$$

لا	=	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تفاعل $۲ + لا$	=	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

نقاط (۵، ۰)، (۹، ۲)، (۱۳، ۴) وغیرہ کو مرتب کر کے ان نقطوں کو ملائے والا خط ایک مستقیم خط ہے، کوئی اور نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے مثلاً (۱، -۳) اس خط پر واقع ہے، طالب علم کوئی نقطہ اس خط پر لے، اس کے محدود معلوم کرے اور دیکھے کہ یہ مساوات  $۵ + ۲ = ۷$  کو پورا کرتے ہیں۔ پس یہ مستقیم



خط مساوات  $۵ + ۲ = ۷$  کی ترسیم ہے دیکھو شکل۔ یہ خط مبدأ میں سے نہیں گزرتا اور یہ مساوات سے ظاہر ہے، کیونکہ مبدأ کے محدود (۰، ۵) مساوات  $۵ + ۲ = ۷$  کو پورا نہیں کرتے ( $۵ + ۰ \times ۲ = ۵$ ) متقل رقم مانع ہے

مساوات  $۵ + ۲ = ۷$

میں اگر تھوڑی دیر کے لئے متقل رقم سے قطع نظر کریں تو مساوات  $۵ + ۲ = ۷$  راہ جاتی ہے، شکل بالا میں اس مساوات  $۵ + ۲ = ۷$  کی ترسیم بھی بنائی گئی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$۵ + ۲ = ۷$  کی ترسیم  $۵ + ۲ = ۷$  کی ترسیم کے متوازی

ہے، یعنی یہ ترسیمیں محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ مساوی زاویے

بناتی ہیں جو مساوی ہونے کے علاوہ دونوں حادے ہیں، طالب علم اسے بالعموم درست پائے گا کہ اگر معیاری صورت میں لا کا سر مثبت ہو تو ترسیم محور لا کی مثبت سمت ولا کے ساتھ حادہ زاویہ بنائے گی اور اگر لا کا سر منفی ہو تو ترسیم محور لا کی منفی سمت ولا کے ساتھ حادہ زاویہ بنائے گی

مساوات  $2 = 1 + 5$  میں جو لا کا سر ہے یعنی ۲، اسکو ہم نے کچھ معنی پہنچائے کیونکہ ہم نے دیکھا کہ  $2 = 1 + 5$  کی ترسیمیں متوازی ہیں یعنی معیاری صورت میں لا کا سر ترسیم کے میلان کو ظاہر کرتا ہے۔ اب ہم مستقل رقم ۵ کی تعمیر معلوم کرتے ہیں، دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم محور لا کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتی ہے جس کا فاصلہ مبدأ سے اوپر ۵ اکائیوں کے مساوی ہے۔

پس مساوات  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم ہم اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں

(۱) مساوات  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم بناؤ، مبدأ سے ۵ اکائیاں اوپر مجھڑھا پر ایک نقطہ ثابت کرو اسکے محدود (۵، ۱) ہیں، اس نقطہ میں سے ایک مستقیم خط کھینچو جو  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم کے متوازی ہو، یہ خط مساوات  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم ہوگا۔

(۲) چونکہ  $2 = 1 + 5$  کی ترسیم کا ہر معین  $2 = 1$  لا کی ترسیم کے متناظر معین سے بقدر ۵ کے بڑا ہے اس لئے ترسیم مطلوبہ اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے،  $2 = 1$  لا کی ترسیم بناؤ اس کے ہر معین

کو بقدر ۵ اکائیوں کے اوپر کی طرف خارج کرو جو نقطے اس طرح سے ملیں ان کو ملانے والا خط  $ما = ۲لا + ۵$  کی ترسیم ہے۔

ان دو ضروری امور کی مزید توضیح کے لئے کہ مساوات  $ما = ۲لا + ۵$  میں (۱) لا کا سر ۲ ترسیم کے میلان کو ظاہر کرتا ہے اور (ب) ترسیم محور ما کو مبدأ سے ۵ اکائیاں اوپر قطع کرتی ہے ہم اس قسم کی دو اور مثالیں حل کریں گے۔

(ب) مساوات ۵ ما - ۳ لا + ۴ = ۰ کی ترسیم۔ سب سے پہلے اس مساوات کو  $ما = لا + ج$  کی صورت میں لکھو یعنی

$$ما = لا - \frac{۴}{۵} \quad (۱)$$

بوجب سابق اس مساوات کی ترسیم دہی ہوگی جو تفاعل  $\frac{۳لا - ۴}{۵}$  کی مناسب پیمانہ کے انتخاب کے لئے مساوات (۱) اس طرح

$$ما = ۵ \times \frac{۳لا - ۴}{۵} = ۳لا - ۴$$

ظاہر ہے کہ

جہ	لا	۰	۱	۲	۱ -	...
تو	ما	- ۴	- ۱	۲	- ۵	...

انچوں (یا سنتی میٹروں) والے کاغذ میں ۱ء کو چھوٹے حصہ کے مساوی فرض کرنا مناسب ہوگا، اس صورت میں اکائی ایک اینچ (یا ایک سنتی میٹر) کے مساوی ہوگی یا چونکہ عددوں کے نسب نماؤں میں ۵ واقع ہوتا ہے ہم اینچ والے کاغذ میں ۵ چھوٹے حصوں کو ایک اکائی کے مساوی فرض کرتے

ہیں یعنی چھوٹا حصہ  $= \frac{1}{5}$ ، ہم اس آخری بیان کو اختیار کریں گے  
 شکل ذیل میں جدول کے نقطوں کو مرسم کرنے سے مساوات  
 $1 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$  کی ترسیم بنائی گئی ہے، اس مساوات میں مستقل  
 رقم  $-\frac{2}{5}$  ہے اور اس کی ترسیم واقعی محور صا کو مبدأ سے  $\frac{2}{5}$  اکائی  
 نیچے کاٹتی ہے نیز  $1 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$  کی ترسیم  $1 = \frac{3}{5}x$  لاک کی ترسیم کے متوازی ہے  
 اور یہ دونوں برسیں دلا سے مساوی اور حادثے زاوے  
 بناتی ہیں اور ہونا بھی یہی چاہیے کیونکہ لاکا سر دونوں مساواتوں  
 میں ایک ہی مثبت مقدار کے مساوی ہے۔

اب مساوات

$$1 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$$

(۲) -----

کی ترسیم بھی

$$1 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$$

کی ترسیم کے

متوازی ہوگی

مگر محور صا کو

مبدأ سے  $\frac{2}{5}$  اکائیاں اوپر قطع کرے گی، اس کی تصدیق  
 کے لئے دیکھو جدول ذیل اور مساوات کی ترسیم

$$1 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$$

...	۱-	۱	۰	۱
...	۵۲	۱۵۲	۵۸	۱

اب لا کے سر کی علامت بدلنے سے مساوات کی دونی صورتیں

پیدا ہوتی ہیں یعنی

$$(۳) \quad \frac{x}{5} - لا = ۱$$

$$(۴) \quad \frac{x}{5} + لا = ۱$$

ان مساواتوں کے لئے ذیل کی جدولیں مرتب کی گئی ہیں اور ان کی ترسیمیں شکل میں بنائی گئی ہیں۔

$\frac{x}{5} + لا = ۱$					$\frac{x}{5} - لا = ۱$				
....	۱-	۱	۰	لا	..	۱-	۱	۰	لا
.....	۱۶۴	۶۲	۶۸	۱	....	۶۲-	۱۶۴	۶۸-	۱

ان مساواتوں کی ترسیمیں باہم متوازی ہیں اور ولا کے ساتھ مساوی اور منفرجے زاوے بناتی ہیں، نیز (۳) کی ترسیم محور ما کو مبدأ سے  $\frac{x}{5}$  اکائیاں نیچے قطع کرتی ہے اور (۴) کی ترسیم  $\frac{x}{5}$  اکائیاں اوپر۔

طالب علم شکل سے دیکھے کہ  $\frac{x}{5} - لا = ۱$  کی ترسیمیں محور ما

پر کے ایک ہی نقطہ  $(۰, -\frac{x}{5})$  میں سے گزرتی ہیں اور محور ما

میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے اسطرح  $\frac{x}{5} + لا = ۱$  کی

ترسیمیں محور ما کے ایک ہی نقطہ  $(۰, \frac{x}{5})$  میں سے گزرتی ہیں

اور اس محور میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے۔

اٹنائے عمل میں ہم نے دیکھا کہ  $\frac{x}{5} + لا = ۱$  کی ترسیمیں ایک

دوسرے کے متوازی ہیں، ان میں سے ہر مساوات کی ترسیم  $x = 3$  لا کی ترسیم کے متوازی ہے اور دراصل اگر اس قسم کی کوئی مساوات لی جائے جس میں مستقل رقم خواہ کچھ ہی ہو لیکن اس میں لا کا سر  $\frac{x}{3}$  ہو تو اس کی ترسیم لازماً  $x = 3$  لا کی ترسیم کے متوازی ہوگی، مثلاً یہ مساواتیں  $x = 3 \pm \frac{y}{3}$  اور  $x = 3 \pm \frac{y}{3} + 1$  وغیرہ

وغیرہ اور بالعموم وہ

بے شمار مساواتیں

جہاں  $x = 3 + \frac{y}{3}$  لا ج

میں ج کو مختلف

مثبت، منفی قیمتیں دینے

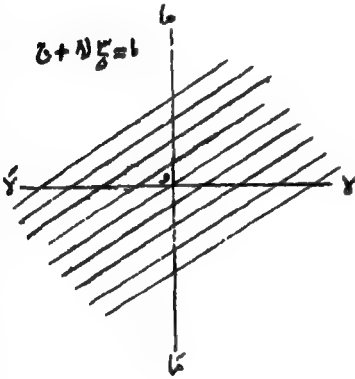
سے حاصل ہو سکتی

ہیں ان سب کی ترسیمیں

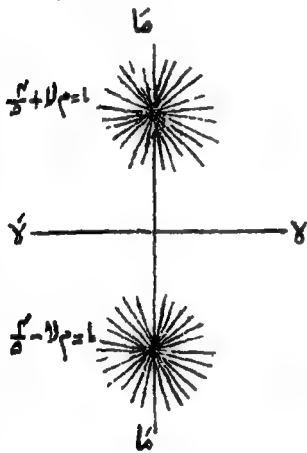
ایک دوسرے کے اور

مساوات  $x = 3$  لا کی ترسیم کے متوازی ہیں یعنی د لا کے ساتھ  
سادہی حادثے زاوے بناتی ہیں۔ ج کی مختلف قیمتوں سے محور ما پر  
کے ان نقطوں کا فاصلہ مبداء سے معلوم ہوتا ہے جن میں سے یہ متوازی  
خط گزرتے ہیں۔

اب ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ مساوات  $x = 3 \pm \frac{y}{3}$  میں مستقل  
رقم وہی رہتی ہے اور لا کا سر (یعنی خط کا میلان) بدلتا ہے اس طرح  
ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جیسے  $x = 3 \pm \frac{y}{2}$ ،  $x = 3 \pm \frac{y}{4}$ ،  $x = 3 \pm \frac{y}{6}$  وغیرہ  
وغیرہ اور یہ سب کی سب بیشمار مساواتیں  $x = 3 \pm \frac{y}{m}$  میں م کو مختلف



مثبت، منفی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔ اب م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو مساوات  $ما = م لا + \frac{۳}{۵}$  کی ترسیم محور ما کو مبدأ سے  $\frac{۳}{۵}$  اکائیوں اوپر کاٹتی ہے یعنی ہمیشہ ثابت نقطہ  $(۰, \frac{۳}{۵})$  میں سے گزرتی ہے اور ہمیشہ  $ما = م لا$  کی ترسیم کے متوازی رہتی ہے، لیکن ہم جانتے ہیں کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے  $ما = م لا$  ان سب خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور اس کے گرد ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں جیسے نصف قطر مرکزہ دائرہ کے گرد، پس معلوم ہوا کہ  $ما = م لا + \frac{۳}{۵}$  سے وہ سب خط تعبیر ہوتے ہیں جو نقطہ  $(۰, \frac{۳}{۵})$  میں سے گزرتے



ہیں اور اس کے گرد ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں، یعنی اگر گھڑی کی سوئی کا ایک سرانقطہ  $(۰, \frac{۳}{۵})$  پر رکھ دیا جائے اور سوئی اس سرے کے گرد گھومے تو اٹنائے گردش میں سوئی وہ سب خط مرتسم کرے گی جو

مساوات  $ما = م لا + \frac{۳}{۵}$  سے تعبیر ہوتے ہیں

اب اگر مساوات  $ما = م لا + \frac{۳}{۵}$  میں مستقل رقم اور لا کا سر

دونوں بدلیں یعنی مساوات  $ما = م لا + ج$  میں م کو بے شمار عددی قیمتیں دی جائیں اور ساتھ ہی ج کو بھی بے شمار مثبت، منفی قیمتیں دی جائیں تو ایسا کرنے سے جو مساواتیں حاصل ہوں گی ان کی ترسیموں کا ہم اس طرح کچھ اندازہ لگا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ گھڑی کی



سوئی کا ایک سر محور ما پر رکھ دیا گیا ہے اور یہ سر اس محور کے نیچے سے اوپر تک نقطہ بنقطہ حرکت کرتا ہے اور ساتھ ہی ہر نقطہ پر اتنا توقف کرتا ہے کہ سوئی اس سرے کے گرد پوری یا ادھی گھوم جانی ہے (پورے گھومنے سے ایک خط دو دفعہ مرتسم ہوگا) تو جو مستقیم خط سوئی اپنی اس دو گونہ حرکت میں مرتسم کرے گی وہی ترسیات مطلوبہ ہونگی۔

(ج) مساوات  $11 = 8 + 3$  کی ترسیم

یہ مشق صرف مناسب پیمانوں کے انتخاب کی حفاظت دی گئی ہے، اب تک تمام سوالوں میں ہم نے سہولت کے لئے فصلہ اور معین دونوں کو ایک ہی پیمانہ پر ناپا ہے، لیکن یہ ضروری نہیں بلکہ آگے چل کر عام ترسیات میں ہم دیکھیں گے کہ تصویر کی خوبصورتی اور تناسب کے لئے یہ زیادہ مناسب ہے کہ متغیروں کو مختلف پیمانوں پر ناپا جائے، ترسیات کے سب سوال شروع سے آخر تک ایک جیسے ہیں اور ایک ہی طریقہ سے حل ہوتے ہیں مگر سوالوں کے خاص حالات کے موافق مناسب پیمانہ کا انتخاب مشق اور فراست پر مبنی ہے، طالب علم کو چاہئے کہ ایک ہی سوال کو مختلف پیمانوں پر اور ایک ہی سوال کے متغیروں کے لئے مختلف پیمانے مان کر اُسے حل کرے تاکہ پیمانوں کے منتخب کرنے میں اسے مشق حاصل ہو اور ان کے مناسب انتخاب کی اہمیت اس کے ذہن نشین ہو جائے۔

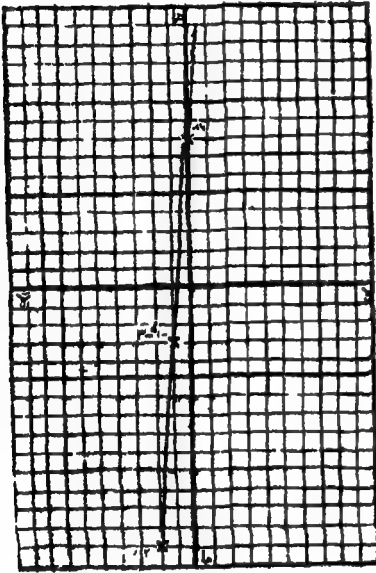
مساوات  $11 = 8 + 3$  میں

اگر	لا = ۲	۱	۰	۱	۲	۳	....
تو	۱۲ = ۳	۸	۱۹	۳۰	۴۱	....	....

بعض معین فضلوں کی نسبت بہت بڑے ہیں اور اگر لا کو بڑھایا جائے تو معین بہت سرعت سے بڑھتے ہیں۔

اگر ہم نقاط بالا کے فضلوں اور معینوں کو ایک ہی پیمانہ پر منقسم کریں اور چھوٹے حصہ کو اکائی فرض کریں تو اس طرح کی شکل حاصل ہوگی جو بلحاظ محوروں کے بہت

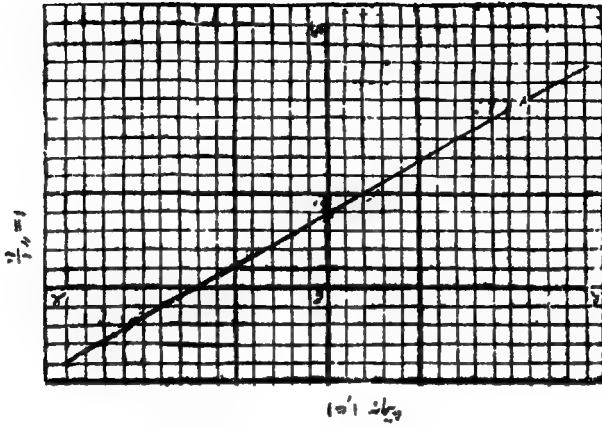
بے طرح واقع ہوتی ہے، اگر اس سے بڑا پیمانہ اختیار کیا جائے تو شکل کی ترسیم کے لئے بہت بڑے کاغذ کی ضرورت ہوگی اور کتاب کا صفحہ کافی نہ ہوگا۔



۱۰۱ = ۱۰

طالب علم فصلہ اور معین دونوں کو ان پیمانوں پر ناپک خود تجربہ کر لے۔

اکائی = ۲، ۱۵، ۱۰، ایک پانچ وغیرہ وغیرہ اس تکلیف سے بچنے کی ایک ترکیب یہ ہے کہ لا کے پیمانہ کی نسبت مائیک قیمتوں کو ناپنے کے لئے مقابلہ چھوٹا پیمانہ اختیار کیا جائے مثلاً فرض کرو کہ لا کے ناپنے کی اکائی ایک پانچ ہے اور مائیک ۱۰ پانچ اس پیمانہ پر ۱۱ = ۸ کی ترسیم حسب ذیل ہوگی جس میں نقطے (۱-۳) (۸، ۰) (۱۹، ۱) وغیرہ منقسم کئے گئے ہیں عام طور پر یہ کلیہ درست ہوگا کہ جب ایک متغیر دوسرے کی نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہو تو



اس سرعت پسند متغیر کے لئے چھوٹی اکائی منتخب کی جائے اور دوسرے کے لئے مقابلہ بڑی۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور لا کو مبدأ سے چار خانے اوپر کاٹی ہے اب ہر چھوٹا خانہ ما کی دو اکائیوں کے مساوی ہے پس اس نقطہ کا فاصلہ مبدأ سے ۸ ہوا یعنی مستقل رقم کے مساوی۔ طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ اگر اسی پیمانہ پر  $11 = 11$  لا کی ترسیم بنائی جائے تو دونوں ترسیمیں ایک دوسرے کے متوازی ہوں گی۔

کے ا۔ اب ہم خطی مساوات کی عام سے عام صورت  $y = mx + c$  اور اس کی ترسیم کے باہمی تعلقات کو ایک جدول کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں، واضح ہو کہ جدول ذیل صفحہ (۶۱/۶۰) کی توسیع ہے۔

جبریدہ رابط

$ما = م + لا + ج$  دو متغیروں کی مساوات  
درجہ اول ہے۔

مساوات  $ما = م + لا + ج$  کے بے شمار  
حل ہیں۔

مساوات  $ما = م + لا + ج$  اور  $ما = م + لا$   
میں لا کے سر مساوی ہیں۔

مساوات  $ما = م + لا + ج$  میں  $م$   
مثبت ہے مثلاً  $\frac{3}{2}$

مساوات  $ما = م + لا + ج$  میں  $م$   
منفی ہے مثلاً  $-\frac{3}{2}$

مساوات  $ما = م + لا + ج$  میں رقم  
مطلق ج ہے۔

مساوات  $ما = م + لا + ج$  میں  $م$   
مثبت ہے اور اسکی عددی قیمت بڑھتی ہے

مساوات  $ما = م + لا + ج$  میں  $م$  منفی ہے  
اور اسکی عددی قیمت بڑھتی ہے۔

مساوات  $ما = م + لا + ج$  اور مساوات  
 $ما = م + لا + ج$  میں رقم مطلق

وہی ہے اور لا کے سر مساوی اور  
مختلف العلامت ہیں۔

ہندسی تعبیر

ہر صورت میں اس کی ترسیم ایک  
مستقیم خط ہے۔

اس کی ترسیم پر سب سے شمار نقطہ  
ہیں۔

ان کی ترسیمیں باہم متہ ازی ہیں۔

اس کی ترسیم محور لا کی مثبت سمت  
ولا کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے۔

اس کی ترسیم محور لا کی منفی سمت  
ولا کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے

اسکی ترسیم محور ما کو میدا سے ج  
اکائیوں کے فاصلہ پر قطع کرتی ہے۔

اس کی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی  
مثبت سمت ولا کے ساتھ بڑھتا ہے۔

اسکی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی  
منفی سمت ولا کے ساتھ بڑھتا ہے۔

ان کی ترسیمیں محور ما پر کے ایک ہی  
نقطہ (۰، ج) میں سے گزرتی ہیں

اور محور ما میں ایک دوسرے  
کا عکس ہیں۔

## امثلہ نمبری ۴

- ۱۔ لا = لا + لا = لا - لا = لا + لا = لا + لا + لا = لا کی ترسیں بناؤ
- ۲۔ لا = لا + لا = لا + لا + لا = لا + لا + لا + لا = لا کی ترسیں بناؤ
- ۳۔ لا = لا کی ترسیں بناؤ جبکہ لا کی قیمتیں ۳، ۵، ۷، ۹ ہوں
- ۴۔ لا = لا ب " " ب " " ب " " ۱۳ - ۱۷، ۱۹، ۲۱
- ۵۔ جو رقم ان مساواتوں کا - لا = لا + لا = لا + لا + لا = لا کی ترسیوں کے اندر گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔
- ۶۔ ایک ہی شکل میں لا = لا، لا = لا، لا = لا، لا = لا، لا = لا کی ترسیں بناؤ۔

۷۔ نقاط ذیل کو مرتب کرو (۳، ۲)، (۹، ۶)، (۱، ۰)، (۱۰، -۱۵) (-۱، -۳)، (۳، ۱)، (۱، ۳) جس جبرہ مساوات کو یہ پورا کرتے ہیں اُسے معلوم کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

ذیل کی سات مثالوں میں لا کو قیمتیں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ دینے سے لا کی متناظر قیمتیں معلوم کرو، ہر صورت میں شکل بنا کر دکھاؤ کہ اس طرح جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرتا ہے۔

۸۔ لا = لا	۹۔ لا = لا
۱۰۔ لا = لا + لا	۱۱۔ لا = لا + لا
۱۲۔ لا = لا + لا	۱۳۔ لا = لا + لا
۱۴۔ لا = لا + لا	

۱۵۔ ایک ہی شکل میں ایک ہی پیمانہ پر ان چار مساواتوں کی ترسییں بناؤ

$$(۱) ۳ + ۲ = ۵ \quad (۲) ۳ - ۲ = ۱$$

$$(۳) ۳ + ۲ = ۵ \quad (۴) ۳ - ۲ = ۱$$

۱۶۔ تفاعیل  $\frac{۳}{۴}$  لا، لا، ۲، ۳، ۵، لا، لا، ۴، ۳، لا،  $\frac{۳}{۵}$ ، ۳

۲ + لا کی ترسییں بناؤ

ذیل کی مساواتوں کی ترسییں بناؤ

$$۱۷ - ۵ = ۶ \quad ۵ + لا = ۶$$

$$۱۸ - ۵ = ۶ \quad ۵ - لا = ۱۱$$

$$۱۹ - ۵ = ۶ \quad ۳ + لا = ۵$$

$$۲۱ - ۱۱ + لا = ۳ \quad ۲۲ - ۱۲ + لا = ۱۰$$

$$۲۳ - ۱ + لا = ۱۱ \quad ۲۴ - \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۶}$$

$$۲۵ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۱۱} \quad ۲۶ - ۳ + لا = ۵$$

۲۷۔ ایک ہی شکل میں ان مساواتوں کی ترسییں بناؤ

$$(۱) ۳ = ۵ \quad (۲) ۳ + لا = ۵$$

$$(۳) ۳ - لا = ۵ \quad (۴) ۳ + لا = ۵$$

۲۸۔ ایک ہی پیمانہ پر ذیل کی مساواتوں کی ترسییں ایک ہی شکل

میں بناؤ

$$(۱) ۵ + لا = ۳ \quad (۲) ۵ - لا = ۳$$

$$(۳) ۵ + لا = ۲ \quad (۴) ۵ - لا = ۳$$

اور ثابت کرو کہ یہ سب آپس میں متوازی ہیں۔

۲۹۔ ذیل کی مساواتوں کی ترسیں ایک ہی شکل میں ایک ہی پیمانہ پر

$$(۲) \quad ۲ - ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۱) \quad ۵ + ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۴) \quad ۳ - ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۳) \quad ۵ + ۳ = ۱ \quad لا$$

اور ثابت کرو کہ یہ سب کی سب ایک ہی نقطہ میں سے گزرتی ہیں اس نقطہ کے محدود معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک ہی شکل میں ذیل کی چار مساواتوں کی ترسیلیں بناؤ

$$(۲) \quad ۵ + ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۱) \quad ۵ + ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۴) \quad ۵ - ۳ = ۱ \quad لا$$

$$(۳) \quad ۵ - ۳ = ۱ \quad لا$$

اور ان کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک ہی شکل میں ذیل کی چار مساواتوں کی ترسیلیں بناؤ

$$(۲) \quad ۰ = ۸ + ۳ - ۱۲$$

$$(۱) \quad ۰ = ۸ + ۳ + ۱۲$$

$$(۴) \quad ۰ = ۸ - ۳ - ۱۲$$

$$(۳) \quad ۰ = ۸ - ۳ + ۱۲$$

اور ان کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو

## خطی ہمزاد مساواتوں کا ترسیمی حل

۱۸۔ اب تک ہمیں دو متغیروں لا، ما کی ایک مساوات درجہ اول دی ہوئی تھی، ہم نے دیکھا کہ ایسی مساوات کے بیشتر حل ہوتے ہیں، یعنی لا، ما کی قیمتوں کے بے شمار جوڑے اسکو پورا کرتے ہیں، ان جوڑوں سے نقطے حاصل کر کے ہم نے اس مساوات کی ترسیم معلوم کی۔

اب فرض کرو کہ ایسی دو مساواتیں }  
 (۱) .....  $۰ = ۲ - ۱۲ - لا$   
 (۲) .....  $۰ = ۳ - ۱۵ + لا$

دی گئی ہیں اور لا، ما کی قیمتوں کا ایک جوڑا (یا زیادہ جوڑے) مطلوب ہیں جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کریں یعنی اگر ایسے جوڑے کے لا، ما کو (۱) میں مندرج کیا جائے تو یہ پوری ہو جائے اور ساتھ ہی اگر (۲) میں مندرج کیا جائے تو یہ بھی پوری ہو جائے۔ اگرچہ ان مساواتوں میں سے کسی ایک کو پورا کرنے والے بیشمار جوڑے ہیں مگر ہم دیکھیں گے کہ ایسا جوڑا صرف ایک ہی ہے جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، اس کو ان مساواتوں کا حل کہتے ہیں اور ایسی مساواتیں ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔

جہر یہ حل - فرض کرو کہ لا، ما کی قیمتیں لا، ما دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتی ہیں، تب

$$۵ | لا - ۱۲ | ما - ۲ = ۰$$

$$۱۰ | لا + ۵ | ما - ۴ = ۰$$

پہلی مساوات کو ۵ اور دوسری کو -۱ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے - ۱۵ - ما - ۶ = ۰ یعنی ما = - ۲، اور ما کی قیمت کسی مساوات مثلاً (۱) میں مندرج کرنے سے لا + ۵ - ۲ = ۰

$$\text{یعنی لا} = \frac{۷}{۵} \text{ پس } \left\{ \begin{array}{l} لا = \frac{۷}{۵} = ۱.۴ \\ ما = -\frac{۲}{۵} = -۰.۴ \end{array} \right. \text{ مساواتوں کا حل ہے}$$

یعنی لا، ما کی قیمتوں کا صرف ایک جوڑا  $(\frac{۷}{۵}, -\frac{۲}{۵})$  دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، طالب علم اس کی تصدیق کرے۔



ترسیمی حل - طالب علم نے دو متغیروں کی مسادات درجہ اول اور اس کی ترسیم کے باہمی تعلق پر غور کیا ہوگا، مسادات کا ہر ایک حل ترسیم پر کے ایک نقطہ کو تعمیر کرتا ہے اور ترسیم پر کا ہر ایک نقطہ مسادات کا ایک حل ہے۔ اب اگر ایک ہی پیمانہ پر دو خطی مساداتوں کی ترسیمیں بنائی جائیں تو یہ دونوں مستقیم خط ہونگی اور ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرینگی۔ یہ نقطہ دونوں ترسیموں پر واقع ہوگا، ایک ترسیم پر ہونے کی وجہ سے اس کے محدود اس ترسیم کی مسادات کو پورا کریں گے، اسی طرح دوسری ترسیم پر واقع ہونے کی وجہ سے اس کے محدود دوسری ترسیم کی مسادات کو پورا کریں گے، یعنی اس نقطہ کے محدود دونوں مساداتوں کو پورا کریں گے یا بالفاظ دیگر ان مساداتوں کا حل ہوں گے۔

پس دو خطی ہمزاد مساداتوں کو ترسیمی طریق پر ہم اس طرح حل کر سکتے ہیں، ایک ہی پیمانہ پر دونوں مساداتوں کی ترسیمیں بناد اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کریں اس نقطہ کے محدود شکل سے دیکھو، یہ محدود یعنی لا، ما کی قیمتوں کا جوڑا دونوں مساداتوں کا حل ہوگا۔

نوٹ - یاد رہے کہ دونوں ترسیمیں ایک ہی پیمانہ پر بنائی جائیں اس سے یہ مراد ہے کہ دونوں مساداتوں میں فصلوں کی اکائیاں ایک ہی ہوں اور معینوں کی بھی ایک ہی، لیکن فصلہ اور معین دونوں کے لئے ایک ہی اکائی استعمال ہو سکتی ہے۔

(۱) ہمزاد مساداتوں { (۱) - ۱۲ - ۲ = ۰ (۲) کو ترسیمی طریق

پر حل کرو۔

- (۱)  $\frac{1}{4} = 1 - 3$  ان مساواتوں کو معیاری شکل میں اس طرح لکھو
- (۲)  $\frac{2}{5} + 3 = 1 - 2$  ان کے حلون سے یہ جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں

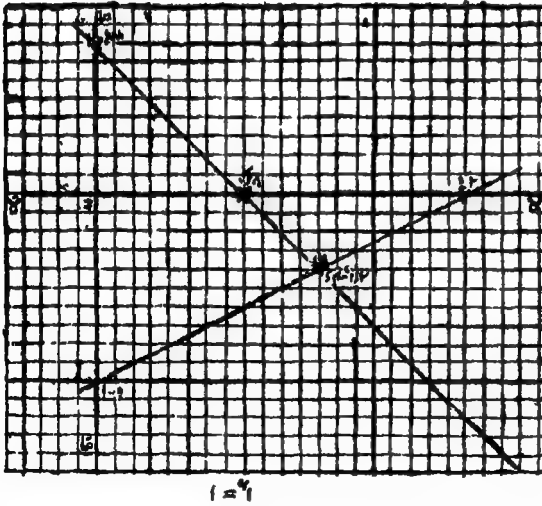
$$0 = 3 - 1.5 + 0.5$$

.....	1	5.8	$0 = 3$
.....	5.2	0	$0.5 = 6$

$$0 = 2 - 6.2 - 3$$

.....	1	2	$0 = 3$
.....	5.5	0	$1 = 6$

دونوں مساواتوں میں فصلہ اور معین کے لئے ایک ایچ کو اکائی فرض کرو، اس طرح چھوٹا حصہ ۱ کو تعبیر کرے گا۔



جدولوں کے نقطوں کو مرتب کرنے سے دو متقیم خط حاصل ہوتے ہیں، یہ ان مساواتوں کی ترسیمیں ہیں اور یہ ایک دوسرے کو ایک نقطہ ن پر قطع کرتی

ہیں۔ اب ن کے محدد (۱.۲، ۰.۴) ہیں یعنی نقطہ ن کا  $1.2 = 3$  اور  $0.4 = 2$

اب یہ نقطہ پہلی مساوات کی ترسیم پر واقع ہے، اس لئے مساوات  $0 = 2 - 6.2 - 3$  کا حل ہے، نیز یہ دوسری ترسیم پر ہے

اس لئے یہ مساوات  $5 + 11 + 15 - 4 = 0$  کا حل ہے، پس یہ دونوں مساواتوں کا حل ہے اور یہی معلوم کرنا مطلوب تھا۔

**تصدیق** - جبرہ طریق پر اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے  $152 = 152$  اور  $4 = 4$ ، پہلی مساوات میں  $11$ ،  $15$  کی یہ قیمتیں رکھنے سے

$152 = 152 - 4 = 152 - 4 = 152$  دوسری مساوات میں یہ قیمتیں رکھنے سے

$4 = 4 - 152 = 4 - 152 = 4$

اکثر اوقات مساوات میں لا کو صفر کے مساوی فرض کرنے سے  
ما کی متناظر قیمت معلوم کرتے ہیں اس طرح سے ایک حل حاصل ہوتا  
ہے اور یہ حل ترسیم کا وہ نقطہ ہے جہاں یہ محور ما سے ملتی ہے کیونکہ  
اس کا لا محدود صفر ہے۔ اسی طرح دوسرا حل معلوم کرنے کے لئے ما کو  
صفر کے مساوی فرض کرتے ہیں اور اس کے جواب میں لا کی قیمت نکالتے  
ہیں یہ حل ترسیم کے اُس نقطہ کو تعبیر کرتا ہے جہاں ترسیم محور لا سے ملتی  
ہے، ترسیم بنانے کے لئے یہی دو حل یا نقطے کافی ہیں۔

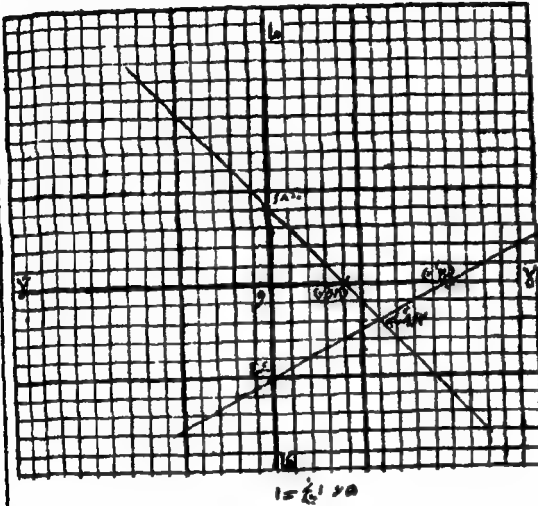
پس سہولت کی خاطر خطی مساوات کی ترسیم بنانے میں مساوات سے  
اُن نقطوں کے محدود معلوم کئے جاتے ہیں جہاں یہ محوروں کو قطع  
کرتی ہے پھر ان نقطوں کو مرتسم کرنے اور ملانے سے ترسیم حاصل  
ہوتی ہے، لیکن اگر یہ نقطے پہا نہ اور محدودوں کی مقدار وغیرہ کے لحاظ  
سے مناسب نہ ہوں تو کوئی اور دو نقطے معلوم کرنے چاہئیں۔

مساوات لا - ۱۲ - ۲ = ۰ کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے - جہاں یہ  
خط محور لا سے ملتا ہے اس نقطہ کا معین  $۰ = ۱۲$  اور مساوات سے  
لا - ۲ = ۰ یعنی لا = ۲

پس محور لا اور خط مطلوب کا نقطہ تقاطع (۰، ۲) ہے -  
اسی طرح جہاں یہ مستقیم خط محور ما سے ملتا ہے اس نقطہ کا  
لا = ۰ اور مساوات سے لا - ۱۲ - ۲ = ۰ یعنی  $۱۲ = ۱۰$  پس محور ما پر  
کا وہ نقطہ جس میں سے خط مطلوب گزرتا ہے (۰، ۱۰) ہے صرف  
ان دو نقطوں (۰، ۲) اور (۱۰، ۰) کو مرتسم کرنے سے ترسیم حاصل  
ہو سکتی ہے، اسی طرح جہاں لا + ۵ - ۵ = ۲ - ۲ کی ترسیم محور لا

اور ما کو قطع کرتی ہے ان نقطوں کے محدود بالترتیب (۸ و ۱) اور (۱۰ و ۸) ہیں، ان کو مرتبہ کرنے اور ملانے سے دوسری ترسیم حاصل ہوگی۔

اب ان چاروں نقطوں کو مرتبہ کرنے کے لئے مناسب پیمانہ کا



انتخاب ضروری ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں محوروں پر ایک چھوٹا حصہ = ۲ یعنی ۵ چھوٹے حصے = ۱ اس پیمانہ پر ساتھ کی شکل بنائی گئی

ہے ترسیموں کا نقطہ تقاطع (۲ و ۱) - (۳ و ۲) ہے اور یہی ساداتوں کا مطلوبہ حل ہے۔

(ب) ساداتوں کا ترسیمی حل

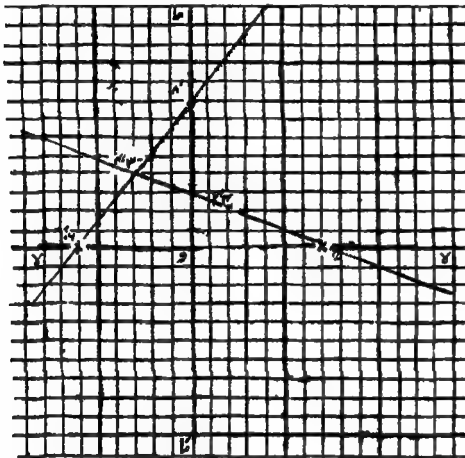
$$\begin{aligned} (1) \quad 0 &= 22 + 63 - 12 \\ (2) \quad 0 &= 12 - 65 + 12 \end{aligned}$$

یہ دونوں خطی ساداتیں ہیں اس لئے ان کی ترسیمیں مستقیم خط ہوں گی اور مستقیم خط کے محل کے تعین کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں دیکھو متبادل ثبوت حصہ ۱ اس لئے ہم ہر ترسیم پر کے صرف دو نقطے معلوم کریں گے۔

جہاں (۱) کی ترسیم محور لا سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدود (۱۰ و ۱) ہیں

جہاں (۱) کی ترسیم محور صا سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدود (۸۰) ہیں پس (۱) کی ترسیم نقاط (۰، ۶) اور (۸۰، ۰) کو مرسم کرنے اور لانے سے حاصل ہوتی ہے۔

دوسری مساوات  $2x + 5y = 10$  کی ترسیم محاور صا اور صا کو بالترتیب نقاط (۰، ۵) اور (۵، ۰) پر قطع کرے گی اب دوسرے نقطہ میں ایک محدود کی قیمت کمور ہے اس



محافظ سے مرسم کرنے کے لئے یہ نقطہ ایسا موزون نہیں، اس لئے اس مساوات کی ترسیم پر ہم ایک اور نقطہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جسکے محدود صحیح عدد ہوں، اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$2x + 5y = 10$  اور اس میں  $x$  کو مسلسل مثبت، منفی صحیح قیمتیں دینے سے ہم  $y$  کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو صحیح ہوں مثلاً اگر  $x = 2$  تو  $y = 2$  اور اگر  $x = 4$  تو  $y = 0$  یہ سب عمل نبانی ہو سکتا ہے۔

پس دوسرے خط پر دو نقطے (۲، ۲) اور (۰، ۵) ہیں ان کو شکل میں مرسم کر کے مساوات کی ترسیم بنائی گئی ہے۔  
دونوں ترسیموں کے نقطہ تقاطع کے محدود (۳، ۳) ہیں

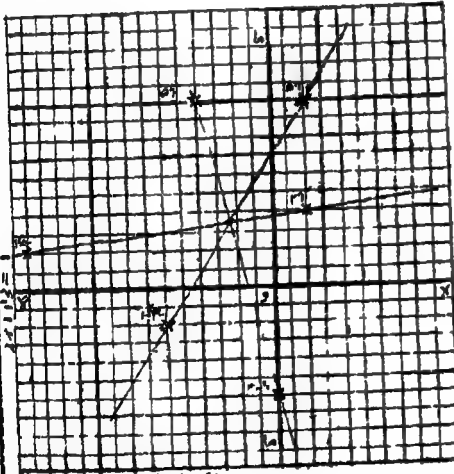
پس  $3 = 1, 3 = 4$  دونوں مساواتوں کا حل ہے۔  
(ج) ذیل کی تین مساواتوں کی ترسییں بناؤ اور ثابت کرو کہ  
یہ ایسے تین خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں جو ایک ہی نقطہ میں  
سے گزرتے ہیں، اس نقطہ کے محدود معلوم کرو۔

$$(1) \quad 3 - 4 = 1 + 2 = 3$$

$$(2) \quad 4 + 3 = 1 + 6 = 4$$

$$(3) \quad 4 - 1 = 15 + 18 = 15$$

یہ خطی مساواتیں ہیں اس لئے ان کی ترسییں مستقیم خط ہوں گی۔  
پہلی مساوات  $3 = 1, 3 = 4$  کی ترسیم پر دو نقطے  $(1, 5)$  اور  
 $(3, 1)$  ہیں۔



۱۳ = ۱۵

دوسری مساوات

$$4 = 3 - 1, 3 = 4$$

پر دو نقطے  $(0, 3)$  اور

$(5, 2)$  ہیں۔

تیسری مساوات

$$4 - 1 = 15 + 18 = 15$$

پر دو نقطے  $(1, 2)$  اور

$(1, 4)$  ہیں۔

ان نقطوں کو مرسم کرنے سے مساواتوں کی ترسیں بنائی گئی ہیں اور یہ  
تینوں ایک نقطہ میں سے گزرتی ہیں جس کے محدود قریب قریب  
 $(1, 3)$  ہیں۔

۱۹۔ خطی ہندسہ مساواتوں کے حل کے متعلق دو تین باتیں غور طلب ہیں۔

(۱) ایک متغیر کی مساوات درجہ اول کے حل کو ہم دو خطی ہزار مساواتوں کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ  $\frac{۲۳+۱۱}{۳} = \frac{۱۲-۱۲}{۵}$ ..... (۱) کو ترسیبی طریق پر حل کرنا مطلوب ہے یعنی مجہول مقدار لا کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ طرفین مساوات ایک دوسرے کے مساوی ہو جائیں۔

اب  $\frac{۲۳+۱۱}{۳} = \frac{۱۲-۱۲}{۵}$  سے جو ربط مساوات مفہوم ہوتا

ہے اس کو ہم ان دو ہزار مساواتوں  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{۲۳+۱۱}{۳} = ۱ \\ \frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۱ \end{array} \right.$  (۲) سے ظاہر کر سکتے ہیں

ان دو مساواتوں کو ترسیبی طریق پر حل کرنے سے لا، ما کی جو قیمتیں لا، ما ملیں گی وہ ادھر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گی یعنی

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{۲۳+۱۱}{۳} = ۱ \\ \frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۱ \end{array} \right.$  پس لا کی قیمت لا، ایسی ہوگی کہ  $\frac{۲۳+۱۱}{۳} = ۱$

$\frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۱$  کیونکہ ان جلوں میں سے ہر ایک ایک ہی مقدار ما کے مساوی ہے یعنی لا، مساوات (۱) کا مطلوبہ حل ہے اور یہ مساواتوں (۲) کی ترسیوں کے نقطہ تقاطع کا فصلہ ہے۔

پس (۱) کو ترسیبی طریق پر حل کرنے کے لئے مساواتوں

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{۲۳+۱۱}{۳} = ۱ \\ \frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۱ \end{array} \right.$  کی ترسیم بناؤ، ان کے نقطہ تقاطع کا فصلہ (۱) کا حل ہوگا۔

**نوٹ۔** دفعہ گزشتہ کے حصہ (ب) میں مساواتوں  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{۲۳+۱۱}{۳} = ۱ \\ \frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۱ \end{array} \right.$

کو ترسیبی طریق پر حل کر کے لا، ما کی قیمتیں معلوم کی گئی ہیں یعنی

$\left\{ \begin{array}{l} ۱ = ۱ \\ ۱ = ۱ \end{array} \right.$  نقطہ تقاطع کے محدد ہیں اور فصلہ لا = ۱ - ۱



اب ہم اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ لا کی جگہ - ۳ رکھنے سے طرین مساوات  $\frac{۲۲+۱۱}{۳} = \frac{۱۲-۱۲}{۵}$  مساوی ہو جاتی ہیں کیونکہ  $\frac{۲۲+۱۱}{۳} = \frac{۲۲+۱۱}{۳} = ۱۲$  جو نقطہ تقاطع کے معین مکی قیمت ہے اور  $\frac{۱۲-۱۲}{۵} = \frac{۱۲-۱۲}{۵} = ۰$  جو نقطہ تقاطع کے معین مکی قیمت ہے اسی طرح ہم مساوات  $۳ + ۵ = ۰$  کے حل کو دو ہمزاد مساواتوں  $۳ + ۵ = ۰$  کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں،  $۳ + ۵ = ۰$  کی ترسیم محور لا ہے، جہاں  $۳ + ۵ = ۰$  کی ترسیم محور لا سے ملتی ہے وہی ان کا نقطہ تقاطع ہے، اس نقطہ کا فصلہ یعنی لا، محدود مساوات  $۳ + ۵ = ۰$  کا حل ہے۔

(۲) اگر دو ہمزاد مساواتیں غیر مطابق ہوں تو ان کا کوئی محدود حل حاصل نہیں ہو سکتا مثلاً  $۳ + ۵ = ۲$  اور  $۳ + ۵ = ۸$  غیر مطابق ہیں کیونکہ یہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\begin{cases} ۳ + ۵ = ۲ \\ ۳ + ۵ = ۸ \end{cases} \dots \dots \dots (۱)$$

طالب علم جبر یہ طریق سے کوشش کر کے دیکھ لے کہ لا، لا کی قیمتوں کا کوئی ایسا جوڑا معلوم نہیں ہو سکتا جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کر سکے، نیز چونکہ ایسا جوڑا ان کی ترسیموں کے نقطہ تقاطع کے محدودوں کو تعبیر کرتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ ان کی ترسیمیں ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گی یعنی متوازی ہوں گی اور یہ امر مساواتوں کی شکل (۱) سے ظاہر ہے۔

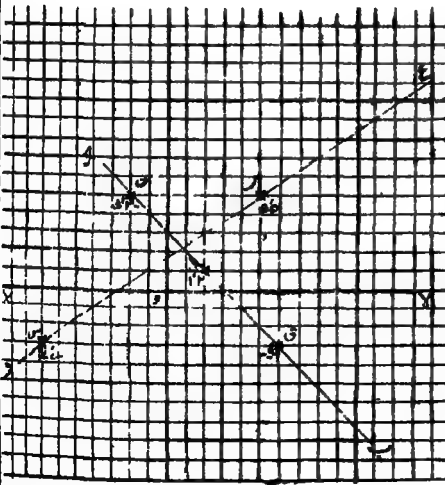
(۳) یہ بھی ضروری ہے کہ ہمزاد مساواتیں جن کا حل مطلوب ہے ایک دوسرے پر منحصر یا موقوف نہ ہوں مثلاً  $0 = 1 - 4 + 3 + 2$  اور  $0 = 2 - 6 + 1 + 3$  ایک دوسرے پر منحصر ہیں کیونکہ دوسری مساوات پہلی کو ۴ سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ دونوں صورتوں میں لا، م کی قیمتوں کے لا انتہا جوڑے جو مساواتوں کو پورا کرتے ہیں وہی ہو گئے ترسیمی نقطہ نظر سے یہ مساواتیں دو ایسے مستقیم خطوں کو تعبیر کریں گی جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے مشترک نقطوں کی تعداد لا انتہا ہے۔

۲۰۔ اب تک ہمیں دو متغیروں کی ایک مساوات درجہ اول دی ہوئی تھی جس کے حل معلوم کرنے اور ان کو مرتب کرنے سے ہم نے اس کی ترسیم معلوم کی۔ اب برعکس اس کے ایک مستقیم خط دیا ہوا ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس خط پر کے سب نقطوں کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں یا بالفاظ دیگر اس خط کی مساوات مطلوب ہے۔

اب تک جتنی مثالیں ہم نے حل کی ہیں ان میں ہم نے دیکھا کہ خطی مساوات کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے اور ایک مستقیم خط پر کے سب نقطے ایک خطی مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس بناء پر ہے ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مفروضہ خط کی مساوات بھی ایک خطی مساوات ہے۔ اب تمام خطی مساواتیں اس مساوات  $0 = 4 + 3 + 2$  میں شامل ہیں کیونکہ ۴ اور ۳ کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے ہم اس قسم کی جو مساوات چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، پس مفروضہ خط

کی مساوات  $ما = م + لا + ج$  ہے جہاں  $م$  اور  $ج$  کی وہ قیمتیں جو اس خط کے ساتھ مخصوص ہیں معلوم کرنا باقی ہے۔

اس غرض کے لئے خط مفروض کو دیکھا جائے، اگر یہ کاغذ پر کھینچا ہوا ہو یا اس کے ایسے اجزاء مثلاً دو نقطے یا ایک نقطہ اور زاویہ میلان کسی ثابت خط سے معلوم ہوں جن کے ذریعہ یہ کھینچ سکے تو بلحاظ کسی مناسب محاورہ کے ہم اس خط پر کے دو نقطوں کے محدود معلوم کر سکتے ہیں، اب یہ محدود مساوات  $ما = م + لا + ج$  کو پورا کریں گے کیونکہ حسب مفروض یہ اس کی مساوات ہے، پس اگر ان نقطوں کے محدودوں کو اس مساوات میں مندرج کیا جائے تو  $م$  اور  $ج$  کی رقوم میں ہمیں دو ہمزاد مساواتیں ملیں گی جن کو جوہر طریقہ پر حل کرنے سے ہم  $م$  اور  $ج$  کی مطلوبہ قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں دیکھو امثلہ ذیل



۱۰۰ = ۱۰

(دو) شکل ہذا میں رد خطوط مستقیم اب اور  $ع$  دیکھیں گئے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کر دے گاغہ کی سطح پر دو متقاطع علی التوأم محور  $لا$  کا ماکھینچو اور خط اب پر کے دو نقاط  $ن$  کی کے محدود شکل سے بلحاظ ان محوروں کے معلوم کر دے۔ (۵۲-۵۱)

ہیں اور  $ق$  کے (۶-۳) اس خط پر اور جتنے نقطے ہیں ہم ان سب

کے محدود معلوم کر سکتے ہیں لیکن ہماری اغراض کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں۔

اب چونکہ اب ایک مستقیم خط ہے اُس کی مساوات لازماً ایک خطی مساوات ہوگی، فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ  $۱۰ = ۵ + ۵$  ج ہے اب پر کے سب نقطے اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اسلئے نقطہ ن کے محدود  $۱۰ = ۵ + ۵$  اس کو پورا کرینگے، ان کو مندرج کرنے سے  $۵ = ۲ + ۳$  ج ..... (۱)

اسی طرح ق کے محدود  $۱۰ = ۱ + ۹$  مساوات  $۱۰ = ۳ + ۷$  ج کو پورا کرتے ہیں پس  $۳ = ۶ + ۳$  ج ..... (۲)

تفریق کرنے سے  $۸ = ۸$  م یعنی م  $= ۱$  اور ج  $= ۵ + ۲ = ۷$  پس اب کی مساوات  $۱۰ = ۳ + ۷$  یعنی  $۱۰ = ۳ + ۷$  ہے۔ اس کی تصدیق کے لئے اب پر کوئی اور نقطہ ط لے اسکے

محدود (۱، ۲) ہیں اور یہ مساوات کو پورا کرتا ہے اسی طرح اس خط پر کے اور سب نقطوں کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

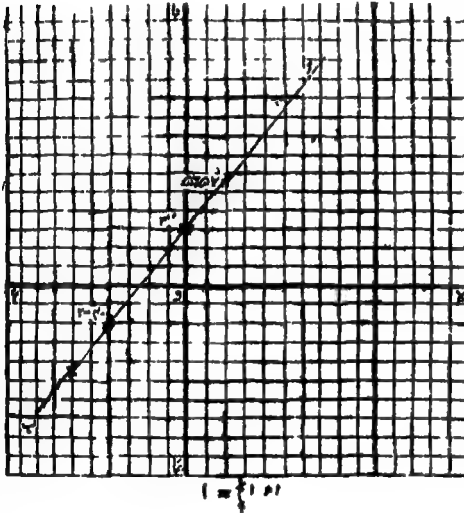
بعینہ ایسے عمل سے ع د کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جس پر کوئی دو نقطے ر، س لے، کوشش یہ ہونی چاہیے کہ اُن نقطوں کو لیا جائے جن کے محدود بیانہ کے لحاظ سے حتی الوسع صحیح عددوں سے تعبیر ہوں، فرض کرو کہ ع د کی مساوات  $۱۰ = ۵ + ۵$  ج ہے، نقاط (۵، ۵) س (-۱، ۳) اسکو پورا کرتے ہیں یعنی  $۵ = ۵ + ۰$  ج { تفریق کرنے سے  $۸ = ۱۲$  م یعنی م  $= \frac{۲}{۳}$  اور ج  $= ۵ - ۵ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳}$  پس ع د کی مطلوبہ مساوات

$$۱ = \frac{۲}{۳} + \frac{۵}{۳} \text{ یعنی } ۲ - ۵ = ۳ - ۵ = ۰ \text{ ہے}$$

۲ =	۲ =	۰	۲	= ۱
۴۵۰	۲ =	۳	۵۵	= ۱

(ب) ثابت کرو کہ نقاط

ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں اس خط کی مساوات معلوم کرو۔  
ان میں سے کسی دو نقطوں کو مرسم کرنے اور ملانے سے  
ایک مستقیم خط حاصل ہوگا،



مثلاً دوسرے اور تیسرے  
نقطہ کو ملانے والا خط  
ا ب کیجئے، پہلے اور  
چوتھے نقطہ کو مرسم کرو  
یہ نقطے اس خط پر واقع  
ہیں، دیکھو شکل۔

فرض کرو کہ دوسرے  
اور تیسرے نقطوں کو

ملانے والے خط کی مساوات  $y = x + 1$  ہے۔

ان نقطوں کے محدود مندرج کرنے سے  $y = 3$  اور

$$۲ - ۵ = ۳ - ۵ = ۰ \text{ ہے، پس ا ب کی مساوات}$$

$$۱ = \frac{۲}{۳} + \frac{۵}{۳} \text{ یعنی } ۲ - ۵ = ۳ - ۵ = ۰ \text{ ہے۔}$$

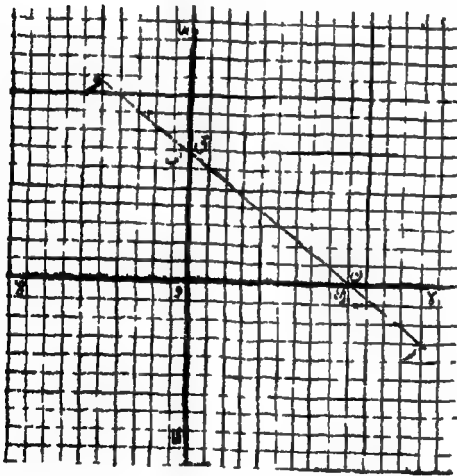
نقطہ (۵، ۶) اس کو پورا کرتا ہے کیونکہ  $۶ - ۵ = ۱$ ۔

اسی طرح نقطہ (۶، ۷) بھی اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔

پس اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ کوئی نقطہ ایک مساوات کی ترسیم پر واقع

ہوتا ہے یا نہیں تو اس کے لئے یہ ضروری نہیں کہ مساوات کی ترسیم بنائی جائے اور پھر نقطہ کو مرتسم کرنے سے معلوم کیا جائے کہ واقعی یہ ترسیم پر ہے یا نہیں، اس امر کے لئے صرف اتنا کافی ہے کہ ہم نقطہ کے محدود مساوات میں مندرج کریں، اگر اس طرح مساوات پوری ہو جائے تو سمجھ لینا چاہئے کہ نقطہ مساوات کی ترسیم پر واقع ہوتا ہے ورنہ نہیں۔

۲۱۔ اگر ایک خط مستقیم محور  $X$  اور  $Y$  کو ایسے نقطوں پر کاٹے جسکے فاصلے مبداء سے بالترتیب  $a$  اور  $b$  ہوں تو اس کی مساوات ان مابینی حصوں کی رقوم میں اس طرح معلوم ہو سکتی ہے



فرض کرو کہ خط  $DR$  محوروں کو نقاط  $a$  اور  $b$  پر کاٹتا ہے جہاں  $a = 1$  اور  $b = 1$ ۔ اب نقطہ  $a$  کے محدود  $(1, 0)$  ہیں اور  $b$  کے  $(0, 1)$ ۔

فرض کرو کہ مستقیم خط

در کی مساوات  $a = m + j$

ہے جہاں  $m$  اور  $j$  کی قیمتیں  $a$  اور  $b$  کی رقوم میں مطلوب ہیں اب چونکہ یہ خط نقاط  $(1, 0)$  اور  $(0, 1)$  میں سے گزرتا

ہے اسلئے  $0 = m + j$  اور  $1 = b + j$

یعنی ج = ب اور م =  $\frac{ب}{ا}$   
 پس سادات مطلوبہ ہوئی  $ما = \frac{ب}{ا} - لا + ب$   
 یعنی  $ا + ما + ب = لا + وب$   
 طرفین کو اب پر تقسیم کرنے سے  $\frac{ا}{ا} + \frac{ما}{ا} + \frac{ب}{ا} = \frac{لا}{ا} + \frac{وب}{ا}$  ..... (۱)  
 یعنی  $۱ = \frac{لا}{ا} + \frac{وب}{ا}$   
 $۱ = \frac{لا}{ا} + \frac{وب}{ا}$

مشق ۱۔ جو خط محاور لا، ما، ب یا ترتیب ما، ب، ج سے - ۳، ۵ کاٹا ہے  
 اس کی سادات  $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ا} = ۱$  یعنی ۵ - لا - ۳ + ما = ۱۵ = ۰ ہے  
 مشق ۲۔ ان ساداتوں  $۲ = لا + ما + ۳ + ۴ = ۰$  کی ترتیبیں محاور پر  
 جو حصے کاٹتی ہیں انہیں معلوم کرو اور ساداتوں کو سادات (۱) کی صورت میں لاؤ۔  
 ۲۲۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم خطی سادات کے متعلق چند  
 متفرق باتوں کا ذکر کرنا مناسب سمجھتے ہیں۔

(۱) خطی سادات کی عام سے عام صورت  $ما = م + لا + ج$  ہے  
 اور یہ ایک مستقیم خط کو تعبیر کرتی ہے، کسی ایک خط پر کے  
 تمام نقطوں کے لئے م اور ج مستقل رہتے ہیں صرف لا اور ما  
 بدلتے ہیں، م کو ہم نے اس خط کا میلان یا ڈھال کہا ہے،  
 یاد رہے کہ یہ زاویہ میلان نہیں ہے۔

اگر ایک مستقیم خط پر کے دو نقطے معلوم ہوں تو ان کے محدود  
 کی رقوم میں خط کی ڈھال یعنی م معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو  
 کہ مفروضہ نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں، چونکہ یہ خط پر ہیں  
 اس لئے یہ اسکی سادات کو پورا کرتے ہیں۔

یعنی  $با = م لا + ج$

$با = م لا + ج$

تفریق کرنے سے  $با - با = م (لا - لا)$  یعنی  $خط$  اس حال میں  $لا - لا =$   
اب چونکہ ایک خط کے لئے  $م$  مستقل غیر متبدل چیز ہے  
جیسے  $\frac{۲}{۵}$  وغیرہ اس لئے معلوم ہوا کہ ایک خط پر کے کسی  
دو نقطوں کیلئے نسبت  $\frac{با - با}{لا - لا}$  یعنی  $\frac{۲ - ۲}{۵ - ۵}$  کی جتنی ہمیشہ مستقل  
رہتی ہے۔

اب اگر کسی نقطوں کے محدود دئے ہوئے ہوں اور یہ معلوم  
کرنا ہو کہ یہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں یا نہیں تو صرف یہ  
دیکھنا کافی ہوگا کہ نسبت  $\frac{با - با}{لا - لا}$  نقطوں کے ہر ایک جوڑے  
کے لئے وہی ہے یا نہیں۔

۶ -	۴ -	۱ -	۲ -	لا
۳۵ -	۲ -	۳ -	۵۵ -	۱ -

مثلاً سوال (ب) دفعہ ۲۰ میں جو نقطے

معلوم ہیں وہ سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں کیونکہ پہلے اور دوسرے  
نقطے کے لئے نسبت  $\frac{با - با}{لا - لا}$  کی قیمت  $\frac{۲ - ۲}{۵ - ۵}$  یعنی  $\frac{۲}{۵}$  ہے پہلے اور تیسرے  
کے لئے  $\frac{۲ - ۲}{۵ - ۵} = \frac{۲}{۵}$  دوسرے اور تیسرے اور چوتھے وغیرہ  
سب کے لئے یہ نسبت ایک ہی ہے۔

(۲) ایک عددی خطی مساوات  $۲ لا + ۳ با + ۴ = ۰$  ہے،  
اسکی عام صورت  $لا + با + ۵ = ۰$  ہو سکتی ہے، بظاہر ان  
مساواتوں میں تین مستقل مقادیر ہیں لیکن فی الحقیقت دو ہیں  
کیونکہ ان کو بالترتیب ۳ اور ۲ پر تقسیم کرنے اور تقلیب سے



یہ مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$۱ = ۲ - لا - \frac{۲}{۳}$$

$$۱ = ۳ - لا - \frac{۳}{۴}$$

جو ۱ = م + لا + ج میں شامل ہیں کیونکہ کسری رقوم -  $\frac{۱}{۲}$  -  $\frac{۱}{۳}$  -  $\frac{۱}{۴}$  اکیلے حروف م اور ج سے تعبیر ہو سکتی ہیں جہاں ہر ایک حرف (م یا ج) کسی عدد مثبت، منفی، صحیح یا کسور کے مساوی ہو سکتا ہے

### امثلہ نمبری ۵

ذیل کی مساواتوں کو عمل تریبی سے حل کرو

$$۱ - لا = ۲ + لا + ۳ = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۳ - لا = ۲ - لا - ۳ = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۵ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۶ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۸ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۹ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۱۰ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۱۱ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

$$۱۲ - لا = ۱ + لا = ۲ = ۳ - لا = ۴ = ۵ - لا - ۳ = ۶ = ۷ - لا - ۵ = ۸$$

۱۳ - تفاعیل ۲ - لا - ۳ =  $\frac{۱۵ - لا - ۳}{۵}$  میں سے ہر ایک کی تریبی بناؤ

اور بنا برہی مساوات ۲ - لا - ۳ =  $\frac{۱۵ - لا - ۳}{۵}$  کا حل دریافت کرو۔

۱۴ - ذیل کی تین مساواتوں کو حل کرنے سے ثابت کرو کہ وہ تینوں

خط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، خط کھینچنے سے اس کی تصدیق کرو

$$\begin{aligned} 0 &= 8 - 6 - 2 \\ 0 &= 6 - 2 + 4 \\ 0 &= 6 + 2 \end{aligned}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ تین مستقیم خط جو ذیل کی تین مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اس نقطہ کے محدد معلوم کرو اور عمل تریبی سے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

$$69 = 5 + 2, 5 = 10 + 2 + 3, 0 = 10 + 2 + 3$$

۱۶۔ ایک ہی محور اور اکائیاں استعمال کرنے سے  $0 = 1 + 2 + 3$ ،  $0 = 1 + 2 + 3$ ،  $0 = 1 + 2 + 3$  کی تریبی بناؤ اور ان کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2 + 3 \\ 0 &= 1 + 2 + 3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 2 + 2 + 2 \\ 0 &= 4 - 2 - 2 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 2 + 2 + 2 \\ 0 &= 1 + 2 + 3 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

۱۷۔ سوال ۱۶ کے خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رأسوں کے محدد معلوم کرو۔

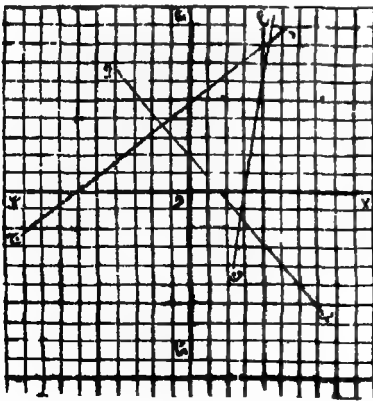
۱۸۔ ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں  $0 = 1 + 2 + 3$ ،  $0 = 1 + 2 + 3$ ،  $0 = 1 + 2 + 3$  ہیں، تریبی طریق سے اس کے رأسوں کے محدد معلوم کرو۔

۱۹۔ ساتھ کی شکل میں خطوط 'ا' ب' ج' د' ع' ف' کھینچے گئے ہیں، ان کی

مساواتیں معلوم کرو اور ہر خط پر

ایک نقطہ لینے سے اپنے جواب کی

تصدیق کرو۔



۲۰۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں

معلوم کرو جو نقطوں کے ازدواج

ذیل میں سے گزرتے ہیں۔

- (۱)  $(۵, ۳)'$   $(۷, ۳)$   $(۷, ۲)$   $(۷, ۱)$   $(۷, ۰)$   
 (۳)  $(۳, ۲)'$   $(۵, ۲)$   $(۵, ۱)$   $(۵, ۰)$   $(۳, ۰)$   
 (۵)  $(۶, ۵)'$   $(۳, ۵)$   $(۳, ۴)$   $(۳, ۳)$   $(۳, ۲)$   
 (۷)  $(۲, ۲)'$   $(۲, ۱)$   $(۲, ۰)$   $(۲, ۰)$   $(۲, ۰)$

نقطہ ذیل کو مرتب کرو اور ہر صورت میں ترکیب کی مساوات معلوم کرو

۳۵۳	۱۵۵	۱۶۲	۱	۳	لا	۰
۵۵۳	۲۵۵	۲	$\frac{۵}{۳}$	۵	۰	۱

۲۱

۸	$۳\frac{۵}{۳}$	۱۵۵	۰	۳	لا	۰
$۷\frac{۵}{۳}$	۰	۳۵۵	$\frac{۵}{۳}$	۲۵۵	۰	۱

۲۲

۲۳۔ ثابت کرو کہ تین نقطے  $(۱, ۳)$ ،  $(۴, ۲)$ ،  $(۳, ۵)$  ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس خط کی مساوات معلوم کرو، نیز معلوم کرو کہ یہ محاور لا، ما سے کہاں ملتا ہے۔

۲۴۔ ایک مثلث کے رأس  $(۰, ۰)$ ،  $(۴, ۲)$ ،  $(۸, ۶)$  ہیں، مثلث کے اضلاع اور ان کے وسطی خطوط کی مساواتیں معلوم کرو۔

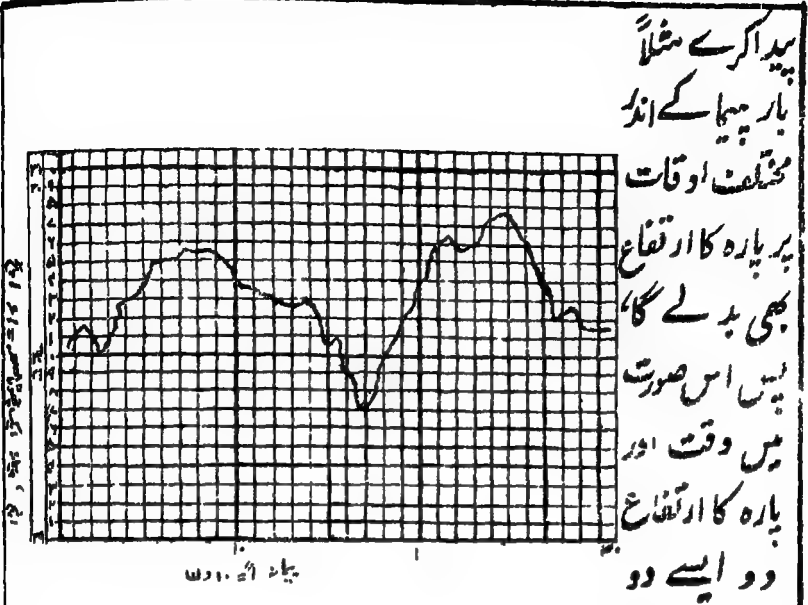
۲۵۔ ایک مثلث کے رأس  $(۰, ۰)$ ،  $(۴, ۲)$ ،  $(۴, ۶)$  ہیں، اضلاع اور وسطیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔



## باب سوم خطی کلیہ اور عام ترسیمیں

۳۲-۲ = ۲ + ۳ کی ترسیم بناتے وقت ہم نے دیکھا کہ لا اور ما متغیر ہیں اور با ہم اس طرح متعلق ہیں کہ ایک کی کسی قیمت کے جواب میں دوسرے کی ایک متناظر قیمت ہے یا ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسرے میں ایک متناظر تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ نیز ان دو متغیروں کو بلحاظ دو محوروں کے مرکب کرنے سے ہم نے ایک خط حاصل کیا جس میں 'لا' ما کی تمام متناظر قیمتیں فقط دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہیں اور اس بنا پر ترسیم کو صرف دیکھنے ہی سے یہ معلوم ہو سکتا ہے کہ ان دو متغیروں میں سے کسی ایک کے بڑھنے یا گھٹنے سے دوسرا متغیر بھی بڑھتا یا گھٹتا ہے، پس  $۲ + ۳ = ۲$  کی ترسیم ایک ایسا خط ہے جس کے ذریعہ دو متعلقہ متغیرات 'لا' ما کے باہمی ربط کو ہندسی یا ترسیمی طریق پر ظاہر کیا گیا ہے۔

اب ضروری نہیں کہ یہ متغیر ایک خطی مساوات کی مجہول مقدار بن ہی ہوں، متغیر کوئی ایسی مقدار ہے جو بدلے جیسے وقت، حیدر آباد کی آبادی، بار پیمیا میں پارہ کا ارتفاع، وغیرہ وغیرہ۔ ایسی کوئی دو بدلنے والی عام مقادیر باہم اس طرح متعلق ہو سکتی ہیں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسری میں ایک متناظر تبدیلی

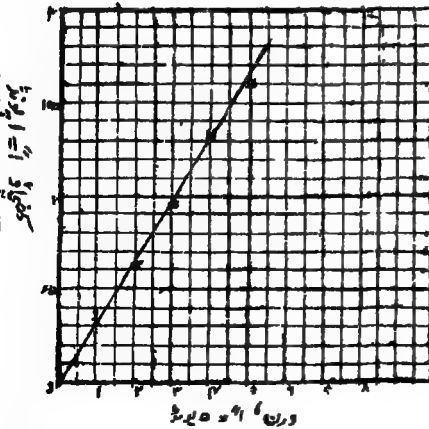


عام طور پر یاد رہے کہ اگر کوئی دو مقداریں  
(۱) بدلتی ہوں یعنی مختلف قیمتیں اختیار کر سکیں  
(۲) اور ان کی قیمتیں باہم متعلق ہوں یعنی ایک کی قیمت  
دوسری کی قیمت پر منحصر ہو  
تو ان کے باہمی ربط کو ہم ترسیبی طریق پر ظاہر کر سکتے ہیں یہ  
ضروری نہیں کہ ایسی مقداریں کسی مساوات سے یا حساب لگانے سے  
معلوم ہوں، اکثر اوقات یہ تجربہ اور مشاہدہ سے حاصل ہونگے۔

اب ایسا ممکن ہے کہ دو متعلقہ مقداروں کی متناظر قیمتوں کو مرتب کرنے سے جو نقطے حاصل ہوں وہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوں یعنی ان مقداروں کا باہمی ربط ترسیبی طریق پر ایک مستقیم خط سے تعبیر ہو سکے، اس کو ہم یوں بیان کریں گے کہ ان مقداروں میں خطی کلیہ یا قانون پایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک نوہے کی کمائی انتصابی سمت میں ایک ثابت نقطہ سے لٹکائی گئی ہے اور اس کے طول کو ناپ لیا گیا ہے، اس کے بعد اس کے دوسرے سرے سے اوزان ایک پونڈ، ۲ پونڈ، ۳ پونڈ، ۴ پونڈ، ۵ پونڈ بالترتیب لٹکائے گئے ہیں اور ہر صورت میں کمائی کے طول کا اضافہ یعنی کھنچاؤ احتیاط سے ناپا گیا ہے، وزن اور کھنچاؤ کی قیمتیں جدول ذیل میں

مندر ج ہیں	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
کھنچاؤ	۰	۵۳۲	۵۶۲	۵۹۵	۶۳۱	۶۶۶	...



کسی وزن کو فصلہ اور اسکے متناظر کھنچاؤ کو معینہ مان کر ساتھ کی شکل میں نقطے مرتب کئے گئے ہیں، یہ سب کے سب تقریباً ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے، خفیف سا تفاوت جو نظر آ رہا ہے اس کا باعث پیمائش کی غلطی ہے۔

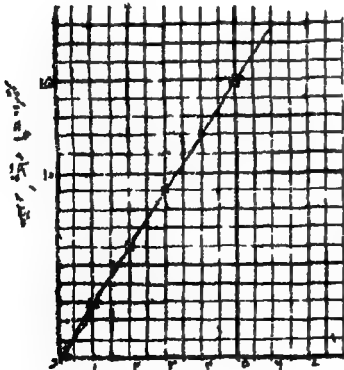
پس وزن اور کچاؤ میں خطی کلیہ پایا جاتا ہے جسکی ہندسی تعبیر شکل میں موجود ہے۔  
 اگلی تین دفعات میں ہم خطی کلیہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔  
 ان میں بالعموم دو متعلقہ متغیرات کی متناظر قیمتوں کے جوڑے  
 حساب لگانے سے یا مشاہدہ یا تجربہ کی بنا پر معلوم ہونگے، ان کو  
 مرسم کرنے سے کئی نقطے حاصل ہوں گے جن میں سے ایک  
 مستقیم خط گزرے گا جو رسمی طریق پر ان متغیرات کے باہمی ربط  
 کو ظاہر کرے گا، نیز ہم اس مستقیم خط کی مساوات بھی معلوم کر سکیں گے  
 دیکھو صفحہ ۲۰، یہ مساوات ان متغیروں کے ربط کی جبر یہ صورت  
 ہوگی۔

۲۴۔ علم حساب کی اکثر مثالیں رسمی طریق پر حل ہو سکتی ہیں لیکن  
 اس طرح کے جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں، اکثر اوقات انکے  
 حل کرنے کے حسابی طریقے نہایت صاف اور مختصر ہوتے ہیں  
 اور اس لحاظ سے قابل ترجیح ہیں، مگر ترسیات کی مزید توضیح کیلئے  
 ہم اس جگہ حساب کی چند مثالیں رسمی طریق پر حل کریں گے۔  
 ہمیں خرید و فروخت کے معاملات میں روزانہ ایسی مقداروں  
 سے واسطہ پڑتا ہے جو متغیر خیال کی جاسکیں اور باہم متعلق ہوں  
 مثلاً شکر ایک روپیہ کی تین سیر آتی ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ یہ  
 ۲ روپے کی ۶ سیر آئیگی، ۸ آنے کی ۱۶ سیر اور بالعموم ق روپوں  
 کی م سیر، دیکھو جدول ذیل

قیمت روپوں میں	۱	۲	۲½	۳	۴	۵½	.....	ق
مقدار سیروں میں	۳	۶	۸	۹	۱۲	۱۶½	.....	م

اب چونکہ شکر کی قیمت کے ساتھ ساتھ اس کی مقدار بھی بدلتی ہے اس لئے ہم ان دونوں کو ایسے متغیر خیال کر سکتے ہیں جو باہم متعلق ہیں اور علاوہ ازیں ہم دیکھتے ہیں کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت بالترتیب ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے مثلاً ۲ اور  $\frac{1}{4}$  کوئی دو قیمتیں ہیں جن کی نسبت  $\frac{1}{4}$  یعنی  $\frac{1}{16}$  ہے۔ ان کی متناظر مقدارین بالترتیب ۶ اور  $\frac{1}{4}$  ہیں جن کی نسبت  $\frac{1}{16}$  یعنی  $\frac{1}{16}$  یا  $\frac{1}{16}$  ہے، طالب علم کوئی اور زوج لیکر دیکھے کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، اس ربط کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ شکر کی قیمت اور مقدار متناسب ہیں یا ان میں سیدھا تناسب ہے۔

اب جدول بالا میں شکر کی قیمتوں کو فیصلہ اور متناظر مقداروں کو معین مان کر ہم نقطے مرتب کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، دیکھو ساتھ کی شکل۔



اب جبکہ شکر کی قیمت اور مقدار میں سیدھا تناسب تھا تو ہمیں معلوم ہوا کہ ان کے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہے، ہم بالعموم درست پائیں گے کہ جب کسی دو متعلقہ متغیروں میں

سیدھا تناسب ہو تو اس طرح سے ان کی جو ترسیم حاصل ہوگی وہ



ایک مستقیم خط ہوگی۔

شکل بالا کا خط مستقیم شکر کی قیمت اور مقدار کے باہمی ربط کو ترسیبی طریق پر ظاہر کرتا ہے اس ربط کی جبریہ صورت جدول بالا سے قیاس ہوگی (جہاں ق قیمت ہے اور م مقدار) کیونکہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، پس یہ جبریہ ربط  $م = ۳ ق$  ہوا، طالب علم اس سے بخوبی مانوس ہے کیونکہ اگر قیمت ۱۰ اور مقدار ۳۰ ہوتی تو یہ مساوات  $۳۰ = ۳ \times ۱۰$  ہوتی جو مبدأ میں گزرنے والے ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

تحریر۔ بالعموم فرض کرو کہ کوئی دو متغیر  $ا$  اور  $ب$  ہیں جو باہم تعلق ہیں اور  $ا$  کی کسی دو قیمتوں  $ا_۱$  اور  $ا_۲$  کے جواب میں  $ب$  کی متناظر قیمتیں  $ب_۱$  اور  $ب_۲$  ہیں، اب اگر  $\frac{ا_۱}{ا_۲} = \frac{ب_۱}{ب_۲}$  یعنی  $ا$  کی کسی دو قیمتوں کی باہمی نسبت  $ب$  کی متناظر قیمتوں کی نسبت کے مساوی ہو تو مختصراً ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ  $ا$  اور  $ب$  متناسب ہیں یا ان میں سیدھا تناسب ہے۔

علم حساب کے اکثر سوالات ایسی مقداروں پر مشتمل ہوتے ہیں جن میں سیدھا تناسب ہو مثلاً

(۱) کسی شے کی قیمت اور مقدار۔ ایک مال اوپر حل کی گئی ہے

(۲) فاصلہ اور وقت۔ ایک ریل گاڑی ایک گھنٹے میں ۳۰ میل

جاتی ہے ۶۰ میل بالعموم ۱۰ گھنٹے میں ۱۰ میل یعنی  $\frac{۱۰}{۱} = \frac{۳۰}{۳}$  یا  $۳۰ = ۳ \times ۱۰$  مساوات درجہ اول، ترسیم مستقیم خط۔

(۳) سود۔ ۱۰۰ روپیہ کا سود ایک سال میں ۵ روپیہ، ۲۰۰ روپیہ کا

۱۰ روپیہ اور ۱۰ روپیہ کا مارپیہ تب  $\frac{1}{10} = \frac{1}{2}$  یعنی ۵ = ۱۰، مساوات درجہ اول ترسیم مستقیم خط وغیرہ وغیرہ

اب ہم حساب کی چند مشکل مثالیں ذیل میں حل کرتے ہیں۔  
**مشق ۱۔** حیدرآباد سے ایک موٹر دن کے ۸ بجے ۲۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے بیدر کی طرف روانہ ہوئی، بیدر کا فاصلہ حیدرآباد سے ۶۰ میل ہے۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے فاصلہ طے کردہ اور وقت کا باہمی تعلق معلوم ہو۔  
 ظاہر ہے کہ ۸ بجے کے ۱ گھنٹہ بعد موٹر کا فاصلہ طے کردہ حیدرآباد سے ۱۰ میل ہوگا، ایک گھنٹہ کے بعد ۲۰ میل، ۲ گھنٹہ کے بعد ۴۰ میل..... اور بالعموم ۱ گھنٹہ کے بعد ۱۰ میل دیکھو جدول

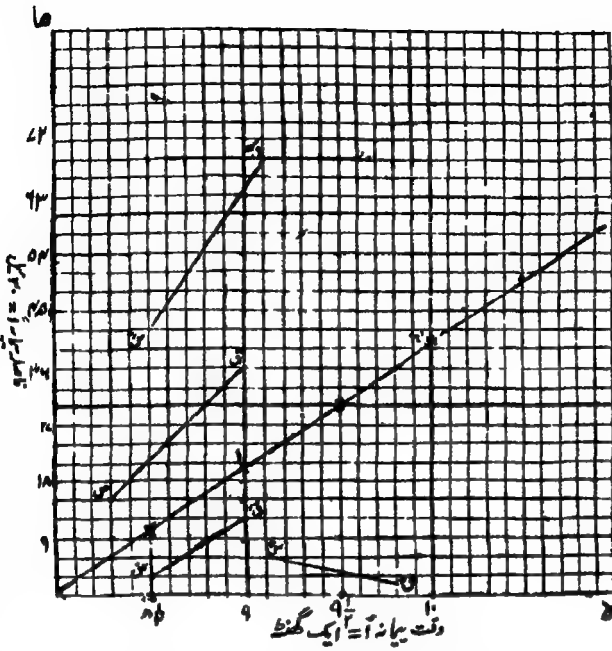
وقت ۸ بجے کے بعد	۰	$\frac{1}{10}$ گھنٹہ	$\frac{1}{5}$ گھنٹہ	$\frac{1}{4}$ گھنٹہ	$\frac{1}{3}$ گھنٹہ	$\frac{1}{2}$ گھنٹہ	۱ گھنٹہ	.....
فاصلہ طے شدہ	۰	۱۰ میل	۲۰ میل	۳۰ میل	۴۰ میل	۵۰ میل	۶۰ میل	.....

ہم دیکھتے ہیں کہ وقت اور فاصلہ میں سیدھا تناسب ہے اس لئے ضروری ہے کہ وقت اور فاصلہ کے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہو۔  
 نیز چونکہ ۱ گھنٹہ میں ۱۰ میل فاصلہ طے ہوتا ہے اسلئے  $\frac{1}{10} = \frac{1}{2}$  یعنی ۲۰ = ۱۰، یعنی فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط جبریہ طریق پر مساوات ۲۰ = ۱۰ سے تعبیر ہوتا ہے، اب چونکہ یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس لئے اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہوگی، پس فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط ہندسی طریق پر ایک سیدھے خط سے تعبیر ہوتا ہے۔

اس مساوات کی ترسیم حاصل کرنے کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں،

جب ۱ = ۱۰ تو ۲۰ = ۱۰ اور جب ۱ = ۲۰ تو ۴۰ = ۱۰

پس نقاط (۱، ۲۰) اور (۲، ۴۰) کو ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے۔



محور کا پر  
وقت کو تعبیر  
کرد اور  
فرض کرد  
کہ ایک بج  
ایک گھنٹہ  
کو تعبیر کرتی  
ہے نیز  
فاصلہ طے  
شدہ کو

محور ما پر تعبیر کرد اور فرض کرد کہ ایک چھوٹا حصہ ۳ میل کو تعبیر کرتا ہے۔  
اس بیان کے موافق ا اور ب کو مرسم کرد ب ا ب ایسے نقطے ہیں  
جن میں سے ہر ایک کا فاصلہ وقت کو تعبیر کرتا ہے اور معین اس فاصلے  
کو تعبیر کرتا ہے جو وقت مذکور پر موٹر کا حیدر آباد سے ہو  
ان نقطوں کو ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے دیکھو شکل۔

اس ترسیم کو دیکھنے ہی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی خاص وقت پر موٹر کا فاصلہ  
حیدر آباد سے کیا ہوگا یا برعکس اس کے حیدر آباد سے کسی خاص فاصلہ پر موٹر  
کس وقت ہوگی۔ مثلاً ۹ بج کر ۲۰ منٹ پر موٹر حیدر آباد سے تقریباً ۳ میل کے  
فاصلہ پر ہوگی، دس بج کر ۲۵ منٹ کے بعد تقریباً ۴ میل پر یا نیز ۳۵ میل پر  
۹ بج کر ۴۵ منٹ کے بعد ہوگی وغیرہ وغیرہ۔

علم حساب کی مدد سے یہ امور معلوم کرنے کے لئے ہر دفعہ جاگنا نہ سوال حل کرنا

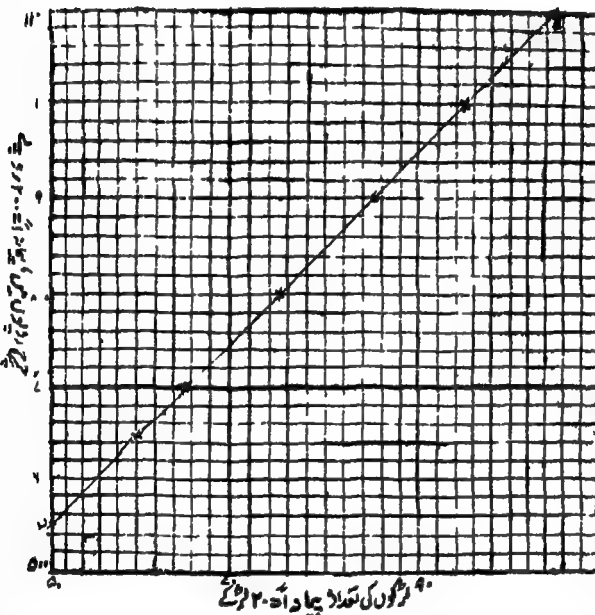
پڑتا ہے۔ مگر ترسیات میں ایسے بیشمار سوالات محض شکل کو استعمال کرنے سے حل ہو سکتے ہیں ایسی ترسیم کو حاضر شمار کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔ اگرچہ ترسیبی طور پر سوال حل کرنے میں پوری صحت میسر نہیں آتی تاہم اس میں جو یہ آسانی مضر ہے کہ ہر سوال کا جواب خاص حدود کے اندر محض ترسیم کو دیکھنے سے معلوم ہو سکتا اس کا لحاظ رکھتے ہوئے یہ طریقہ حساب پر فوقیت رکھتا ہے۔

نوٹ۔ ہم نے وقت کی پیمائش بجے سے شروع کی اور فاصلہ کی نقطہ ابتدائی حیدر آباد سے گویا ہمارے موجودہ مبدأ کے محدود (۰.۸) ہیں جہاں ۸ وقت کا محدود ہے اور صرف فاصلہ کا دراصل ہیں وقت کی پیمائش رات کے بارہ بجے سے کرنی چاہیے تھی جس صورت میں مبدأ کے محدود (۰.۶۰) ہوتے لیکن اس صورت میں ربع اول میں مبدأ کے پاس کا بہت ساحصہ بیکار جانا کیونکہ ترسیم اس میں واقع ہوتی، اس لحاظ سے ہم نے نقطہ (۰.۸) کو مبدأ مان لیا یعنی مبدأ کو منتقل کر کے ہم نقطہ (۰.۸) پر لے آئے اور وقت اور فاصلہ کی پیمائشیں اس نقطہ سے کرنے لگے۔

شکل بالا میں چند مزید ترسیمیں بنائی گئی ہیں، جدول ذیل سے واضح ہوگا کہ ان سے جداگانہ کیا تعبیر ہوتا ہے۔

مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار مع کیفیت	
و سے ۱۵ میل	۸ بجکر ۱۸ منٹ	۳۰ میل فی گھنٹہ دسے	س ق
و سے ۳ میل	۸ بجے	۱۸ میل فی گھنٹہ دسے	س ق
و سے ۶ میل	۹ بجکر ۶ منٹ	۶ میل فی گھنٹہ دکی جانب	س ق
و سے ۲۲ میل	۸ بجے	۴۵ میل فی گھنٹہ دسے	س ق

مشق ۲۔ ایک اسکول کے دارالاقامہ کے ماہانہ اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور باقی لڑکوں کی تعداد پر موقوف ہے، ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۵۵۰ روپیہ ہیں اور ۱۰۵ لڑکوں کے ۱۱۰۰ روپے ہیں۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے لڑکوں کی کسی تعداد کے اخراجات معلوم ہو سکیں، اس سے ۷۵ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات معلوم کرو اور نیز ان لڑکوں کی تعداد معلوم کرو جن کے اخراجات ۱۰۰۰ روپے ہیں۔



اس سے ہمیں بدیہی طور پر یہ معلوم نہیں ہوتا کہ لڑکوں کی تعداد اور ان کے اخراجات میں یہ تناسب ہے تاہم اگر ہم یہ فرض کریں کہ لڑکوں کی تعداد لا ہے

مستقل خرچ ب ہے اور ہر لڑکے کا ماہانہ خرچ ل ہے تو کل خرچ ما = لا + ب اب چونکہ ۵۰ لڑکوں کا خرچ ۵۵۰ روپیہ ہے اور ۱۰۵ کا ۱۱۰۰ روپیہ اسلئے

$$۵۰ + ۵ل = ۵۵۰ \text{ روپے } \dots (۱)$$

$$۱۰۵ + ۵ل = ۱۱۰۰ \text{ روپے } \dots (۲)$$

جس سے ۵۵۰ = ۵ل یعنی ل = ۱۰ روپے یعنی ہر ایک لڑکے کا خرچ ۱۰ روپیہ ہے۔

۱ کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے  $b = 50$  پس مستقل خرچ ۵۰ روپے ہے۔

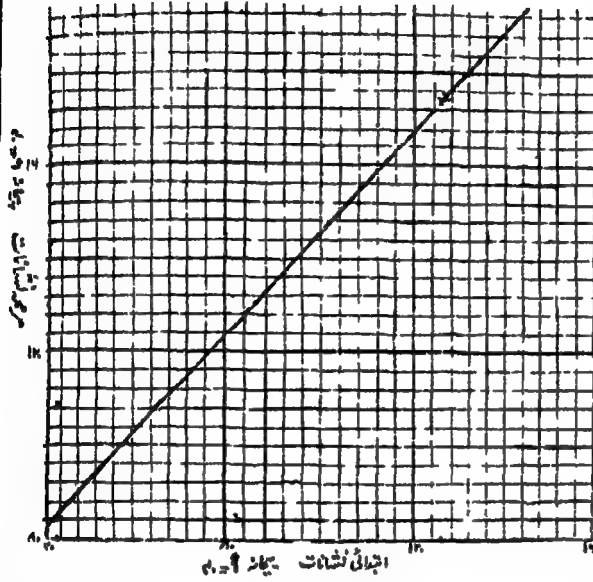
اس لئے کل ماہانہ خرچ ۱ اور لڑکوں کی تعداد لا میں جبر یہ تعلق  $a = 10 + 50$  ہے، یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس کی ترسیم صریحاً ایک خط مستقیم ہوگی۔ ۲۰ لڑکوں کو محور کلاپر ایک انچ سے اور ۲۰ روپیوں کو محور ما پر ایک چھوٹے حصے یعنی ۱۰ انچ سے تعمیر کرو۔ نیز فضلوں کو ۵۰ سے اور معینوں کو ۵۰ سے اپنا شروع کر دینی مبداء کے محدود (۵۰، ۵۰۰) فرض کرو۔

اب  $a = 10 + 50$  کی ترسیم بنانے کے لئے صرف دو نقطے ن اور ق مرسم کرنا کافی ہوگا جن کے فضے بالترتیب ۵۰ اور ۱۰۵ لڑکوں کو تعمیر کرتے ہیں اور معین ۵۰ اور ۱۱۰ روپیوں کو، ان نقطوں کو ملانے والا خط مطلوب ترسیم ہے اس ترسیم کو محض دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۸۰۰ روپے ہونگے اور ان لڑکوں کی تعداد جن کا خرچ ۱۰۰ روپیہ ماہوار ہے ۹۵ ہے۔ شکل کو دیکھ کر ذیل کی جدول میں لڑکیوں کی تعداد اور ان کے اخراجات کی چند فرید مثالیں درج کی گئی ہیں۔

تعداد لڑکوں کی	۶۰	۶۵	۸۵	۹۰	۹۰۰
اخراجات	۶۵۰	۷۰۰	۹۰۰	۹۵۰	۹۰۰

پس دفنہ قبل کی طرح ایسی ترسیم کو بھی بطور حاضر شمار استعمال کیا جاسکتا ہے مشق ۳۔ کسی امتحان کے پرچے جانچتے وقت ایک ممکنہ نے زیادہ سے زیادہ ۱۲۶ نشانات دئے اور کم از کم ۳۴، اب وہ تمام پرچوں کے

نشانات کو ایک خطی کلیہ کے موافق اس طرح بدلنا چاہتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ نشانات ۱۷۵ ہو جائیں اور کم سے کم ۸۵، بتاؤ کہ وہ اسے کس طرح کر سکتا ہے اور معلوم کرو



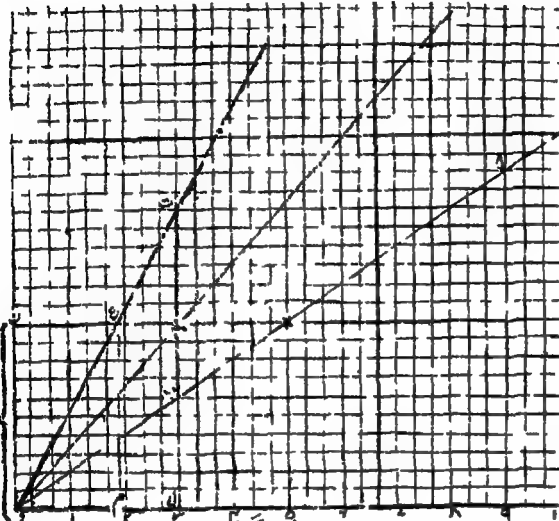
کہ جن پرچوں کے ابتدائی نشانات ۹۵، ۸۵، ۱۰۰ تھے ان کے مرتبہ نشانات کیا ہوں گے۔ افقی محور دلا کر اصلی نشانات کو اور اتصالی محور و ما

پر نئے نشانات کو ناپو اور ہر صورت میں پیمانہ ایک انچ = ۳۰ فرض کرو۔ نیز فصلوں کو ۴۰ سے اور معینوں کو ۸۰ سے ناپنا شروع کرو، دو نقاط لا = ۴۳، ۸۵ اور لا = ۱۲۶، ۱۷۵ کو شکل میں مرتب کرو، ان کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملاؤ، ترسیم محصلہ سے لا کی متناظر قیمتیں معلوم کرو۔

اصلی نشانات	۹۵	۸۵	۱۰۰	۱۱۲	۱۲۳
نئے نشانات	۱۰۸	۱۲۹	۱۳۶	۱۵۹	۱۷۲

مشق ۴ - ایک نلی ایک حوض کو ۳ گھنٹے میں بھرتی ہے، دوسری ۵ گھنٹے میں، بتاؤ کہ دونوں نلیوں کو حوض کو کتنی دیر میں بھر دیں گی۔

فرض کرو کہ محور لا پر کا ہر ایک چھوٹا حصہ  $(= \frac{1}{20}$  اینچ) ۲۰ منسب کو ظاہر کرتا ہے اور محور ما پر ایک اینچ دن پورے حوض کو تعبیر کرتا ہے۔



چھوٹی نیلی جو حوض کو ۵ گھنٹوں میں بھرتی ہے اس کی ترسیم والا دو نقاط (۰.۰) اور (۱.۵) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

نیر بڑی نیلی جو

حوض کو ۳ گھنٹہ میں بھرتی ہے اس کی ترسیم نقاط (۰.۰) اور (۱.۳) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

ہیں ایک ایسی نلی کی ترسیم معلوم کرنی چاہیے جس کا کام ان دونوں نلیوں کے مجموعی کام کے مساوی ہو۔ اُس نلی کی ترسیم پر کا ایک نقطہ (۰.۰) ہے ایک اور نقطہ معلوم کرنے کے لئے ۳ گھنٹہ کے نشان ل میں سے گزرنے والا عمود کھینچو جو چھوٹی نیلی کی ترسیم والا سے ف پر ملے، اب ل ف چھوٹی نیلی کا ۳ گھنٹہ کا کام ہے اور بڑی نیلی کا ۳ گھنٹہ کا کام دن کے مساوی ہے، اس لئے ل ف کو دت تک اتنا خارج کرو کہ دت = دن

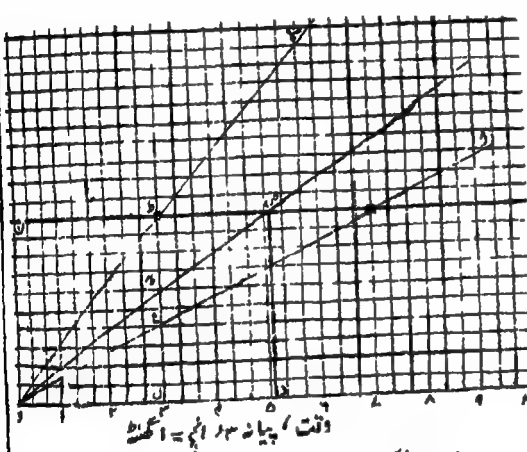
اب ل دت = ل ف + دت = ل ف + دن یعنی ل دت دونوں نلیوں کا تین گھنٹہ کا مجموعی کام ہے، پس نقطہ دت نیلی کی ترسیم پر واقع ہے، اس لئے نئی نلی کی ترسیم دت ہے۔



اب ن سے محور لا کے متوازی ایک خط کھینچو اور فرض کرو کہ یہ د ن سے ع پر ملتا ہے، ع سے ولا پر عمود ع م نکالو، پس دونوں نمایاں د ن دم میں م ع = ون یعنی پورے حوض کو بھر دیتی ہیں۔

پس وقت مطلوبہ = وم = ۱۶۸۶ گھنٹے

اگر ایک نئی حوض کو بھرتی ہو اور دوسری خالی کرتی ہو تو اس طرح عمل کرو کہ تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ بڑی نئی حوض کو تین گھنٹے میں بھرتی ہے اور چھوٹی نئی اسے ۷ گھنٹے میں خالی کر دیتی ہے، اگر دونوں ایک ساتھ کھول دی جائیں



تو حوض کتنی دیر میں بھر جائے گا۔ بڑی نئی کے

کام کی ترسیم دو نقاط

(۰،۰) اور (۱۰،۱۰)

میں سے گزرتی ہے، چھوٹی

نئی کے کام کی ترسیم دو

نقاط (۰،۱۰) اور (۱۰،۰)

میں سے گزرتی ہے، محور لا پر کے ۳ گھنٹہ والے نشان ل میں سے ایک عمود

کھینچو جو دو د و ب سے با ترتیب ع اور ط پر ملے۔

بڑی نئی کا تین گھنٹہ کا کام ل ط ہے جہاں ل ط = ون، کیونکہ یہ

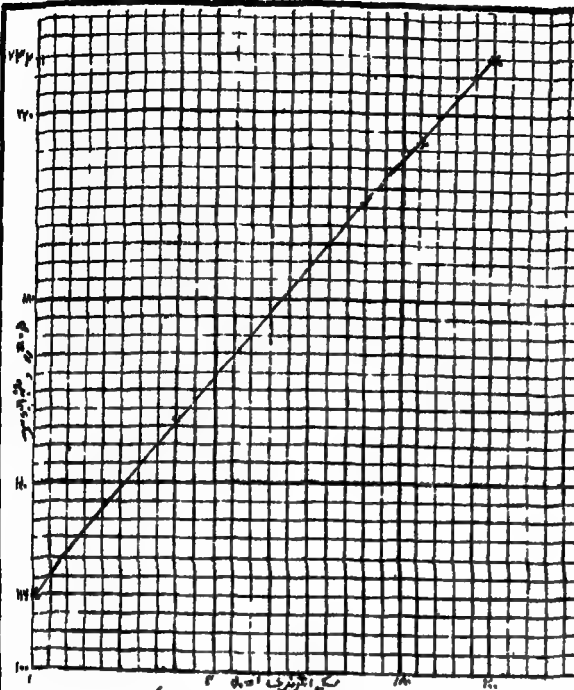
پورے حوض کو ۳ گھنٹے میں بھر دیتی ہے۔

چھوٹی نئی ۳ گھنٹے میں حوض کا حصہ ل ع خارج کر دیتی ہے، پس اگر دونوں

نمایاں کھول دی جائیں تو ۳ گھنٹے میں یہ حوض کا حصہ ع ط بھر دیں گی۔

اب معین ل ع ط پر ل ط کو ع ط کے مساوی قطع کرو، نقطہ ط





انگریزی روپوں کو  
افقی محور دکلا پر اور  
عثمانیہ روپوں کو عمودی  
محور دکلا پر نا پڑا اور  
فرض کرو کہ ہر صورت  
میں ۴۰ روپے ایک  
انچ سے تعبیر ہوتے  
ہیں۔

نیز چونکہ ایک سو  
اور دو سو کی حدود کے

اندروپوں کا ربط مطلوب ہے اس لئے فصلوں اور معینوں کو ۱۰۰ سے  
ناپنا شروع کرو یعنی نقطہ (۱۰۰، ۱۰۰) کو مبدأ مقرر کرو۔

ترسیم پر دو نقطے (۱۱۹، ۱۰۰) اور (۲۳۲، ۲۰۰) ہیں ان کو ملانے سے شکل  
میں ترسیم کی گئی ہے، جدول ذیل میں انگریزی اور عثمانیہ روپوں کی چند متناظر  
قیمتیں درج ہیں جو اس شکل کو بطور حافضہ استعمال کرنے سے معلوم کی گئی ہیں۔

.....	۱۳۲	۱۸۴	۱۴۴	سکہ انگریزی
... ..	۱۵۳	۲۱۴	۱۶۵	سکہ عثمانیہ

مشق ۲۔ تپش ناپنے کے پیمانہ سنتی گریڈ اور فارن ہیت کے باہمی ربط کو  
ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو۔

فارن ہیت پر نقطہ انجماد یعنی پانی کے جمنے کا نقطہ ۳۲° سے تعبیر ہوتا ہے  
اور نقطہ پوشش یعنی پانی کے کھولنے کا نقطہ ۲۱۲° سے۔

سنٹی گریڈ پر نقطہ انجماد  $0^{\circ}$  سے تعبیر ہوتا ہے اور نقطہ جوش  $100^{\circ}$  سے

اسلئے  $100^{\circ}$  سنٹی گریڈ =  $180^{\circ}$  فارن ہیت

پس اگر کوئی پیش فارن ہیت پر

ف درجوں سے تعبیر ہو اور سنٹی گریڈ پر

س درجوں سے تو ف =  $32 - \frac{180}{100}$  س

یعنی ف =  $\frac{180}{100}$  س + ۳۲ --- (۱)

فارن ہیت کے درجوں کو افقی

محور دلا پرنا پو اور اس کے  $100$  درجوں کو ایک انچ سے تعبیر کرو، نیز

سنٹی گریڈ کے درجوں کو انتہائی

محور و ما پرنا پو اور اس کے

$50$  درجوں کو ایک انچ سے

تعبیر کرو۔

مسادات (۱) سے دو

نقاط ف =  $32$  س =  $0$

اور ف =  $212$  س =  $100$

حاصل ہوتے ہیں، ان کو مرسم

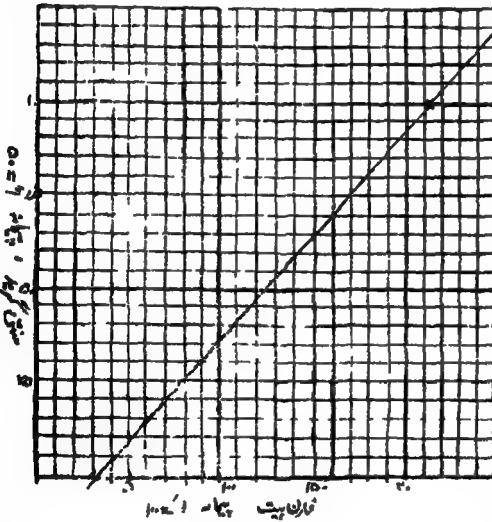
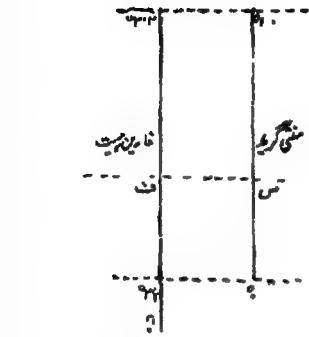
کرنے اور ملاسنے سے شکل میں

ترسیم کھینچی گئی ہے، اوپر کی شکل بہت چھوٹے پیمانہ پر بنائی گئی ہے اسلئے

درجوں کی باہمی تحویل کے لئے یہ چنداں مفید نہیں ہو سکتی، طالب علم کاغذ

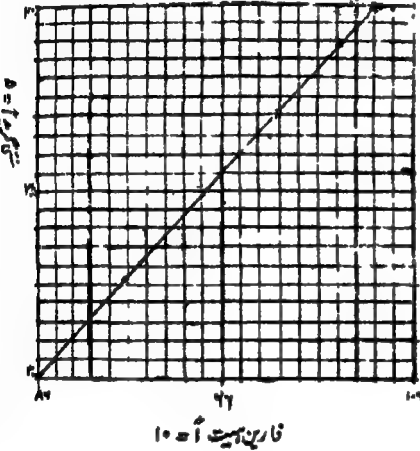
کے بڑے تختہ پر فضلہ کے لئے پیمانہ  $1 = 50$  اور معین کے لئے  $1 = 20$  میکر

ترسیم بنائے۔



اگر تپش کی خاص حدود مثلاً ۹۰° ف اور ۱۰۰° ف سے یا اس کے قریب قریب کی تپشوں سے ہمیں زیادہ سرد کار ہو تو بڑے پیمانہ پر شکل بنائی جاسکتی ہے جس سے زیادہ صحیح نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسادات (۱) سے  $\frac{5}{9}$  (ف - ۳۲) اور ہم دیکھتے ہیں کہ جب



ف = ۸۶ تو س = ۳۰ اور

جب ف = ۱۰۴ تو س = ۴۰

اس لئے ف کی قیمتوں کو فصل

اور س کی متناظر قیمتوں کو

معین مان کر ان دو نقطوں کو

مرسم کرو، ان کو ملانے سے

۸۶° ف اور ۱۰۴° ف کی

حدود کے اندر ایک مناسب

پیمانہ پر ترسیم حاصل ہوتی ہے جس کو بطور حاضر شمار استعمال کیا جاسکتا ہے، اس شکل ہم دیکھتے ہیں کہ ۹۰° ف ۳۲° س اور ۱۰۰° ف ۳۷° س کے مساوی ہے۔

جدول ذیل میں ف اور س کی چند متناظر قیمتیں اس ترسیم سے حاصل کی گئی ہیں

.....	۱۰۳.۵۳	۹۸.۶۸	۹۵	۹۰.۵۸	ف
.....	۳۹	۳۷	۳۵	۳۲.۵	س

۲۶۔ طبیعی مقادیر جو ایک خطی مساوات کے ذریعہ  
مربوط ہوں

اب تک ہمیں یا تو ترسیم کی مساوات دی ہوئی تھی یا سوال کی نوعیت

ایسی تھی کہ اس کی بنا پر متغیروں کی باہمی مساوات باسانی معلوم ہو سکے، حسابی اور تحلیلی تریسوں میں ہم نے سوالات سے ایسی مساواتیں مرتب کیں اور ان سے بیشمار نقطے حاصل کر کے مقادیر کی تریسیں بنائیں، لیکن بعض اوقات متغیروں کی متناظر قیمتیں مشاہدہ یا تجربہ کی بنا پر معلوم کی جاتی ہیں، مثلاً معل یا لیور رٹری میں متعلقہ مقادیر کی قیمتوں کے چند جوڑے تجربہ سے معلوم کئے جاتے ہیں اور یہ مطلوب ہوتا ہے کہ ان مقداروں کے باہمی ربط کی جبریہ مساوات معلوم کی جائے۔

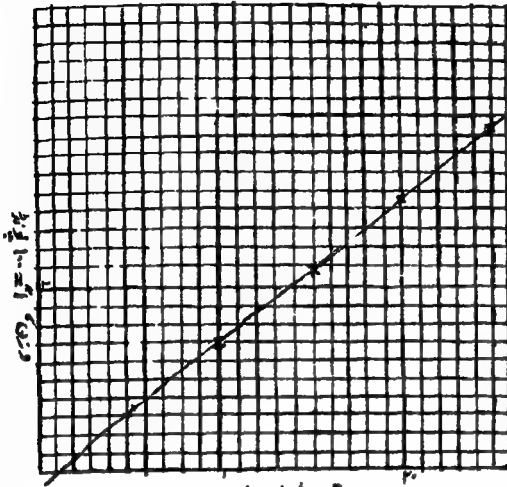
اس غرض سے ہم ان مقداروں کی متناظر قیمتوں سے نقطے مرتب کرتے ہیں اور کئی مرتبہ ایسا ہوتا ہے کہ یہ نقطے قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس صورت میں اگر ہم ایک ایسا مستقیم خط کھینچیں جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرے تو اس خط کی مساوات قریب قریب ان مقداروں کے باہمی ربط کو تعبیر کرے گی لیکن یہ ربط صرف ان حدود کے اندر صحیح خیال کیا جاسکتا ہے جن کے اندر تجربہ کیا گیا ہے۔

مشق ۱۔ ایک مشین کے ذریعہ مختلف وزلوں کو اٹھانے کے لئے جو قوتیں درکار ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں درج ہیں

قوت، ق	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
وزن، و	۳۲	۷۰	۱۵۸	۱۴۶	۱۸۳	۲۲۲

ق اور و کی متناظر قیمتوں سے نقطے مرتب کر دو اور ثابت کر دو کہ ق اور و کے باہمی ربط کو ہم  $Q = 1.5 + 0.001W$  سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں  $Q$  اور  $W$

مستقل مقدار میں ہیں، نیز 'ا' اور 'ب' کی قیمتیں دریافت کرو، قوت کو بطور فہرہ



اور وزن کو بطور معین ناپو  
قوت کے لئے ۱۰ پونڈ  
کو 'ا' سے تعبیر کرو اور  
وزن کے لئے ۱۰۰ پونڈ  
کو 'ب' سے تعبیر کرو  
اس طرح نقاط (۳۲، ۵)  
(۱۰، ۱)..... وغیرہ وغیرہ

قوت 'ا' = ۱۰ پونڈ

کو مرتبہ کرنے سے ہم  
دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو عین  
مبدأ میں سے نہیں گزرتا۔ پس ہم جائز طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ 'ق' اور  
د میں ربط 'ق' = 'ا' + 'ب' موجود ہے جہاں 'ا' 'ب' مستقل مقدار میں ہیں  
اس سادات میں 'ق' اور 'و' کی بجائے بالترتیب ۵ اور ۳۲ درج کرنے سے

$$(۱) \quad ۵ = ۳۲ \times 'ا' + 'ب' \dots\dots$$

نیز 'ق' اور 'و' کی بجائے بالترتیب ۱۳۶، ۲۰ کہنے سے

$$(۲) \quad ۲۰ = ۱۳۶ \times 'ا' + 'ب' \dots\dots$$

سادات (۱) اور (۲) سے  $'ا' = \frac{۵}{۳۸}$  اور  $'ب' = \frac{۱۵}{۱۹}$

پس سادات مطلوبہ جو قوت اور وزن کے باہمی ربط کو ظاہر کرتی ہے

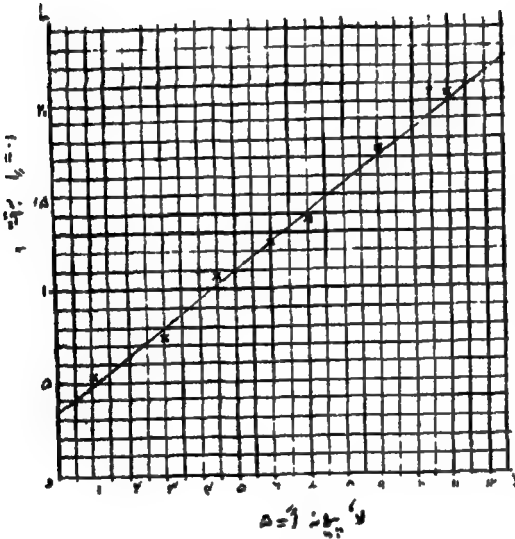
$$'ق' = \frac{۵}{۳۸} + \frac{۱۵}{۱۹} \times 'و' \quad \text{یعنی} \quad ۵ - ۳۸ \times 'ق' = ۳۰ - ۳۸ \times 'و'$$

مستقیم ۲ - ایک مقدار 'ا' کی قیمتوں کے جواب میں ایک اور مقدار 'ا'  
کی تقریبی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، یہ قیمتیں جدول ذیل میں

درج ہیں

۱۳	۱۱	۹	۷	۶	۴۵۵	۳	۱	لا
۲۳۶۴	۲۰۵۴	۱۷۵۳	۱۴۵۸	۱۲۵۵	۱۰۵۶۴	۷۵۵۷	۵۵۲	ما

لا، ما کی قیمتوں کے ان جوڑوں سے نقطے مرتبہ کر کے کہ لا، ما میں ربط  $ما = لا + ب$  موجود ہے اور ب کی قیمتیں معلوم کر دو۔  
لا کی قیمتوں کو محور



لا پر پیمانہ ۱ اینچ = ۵ کے مطابق اور ما کی قیمتوں کو محور ما پر پیمانہ ۱ اینچ = ۱۰ کے مطابق ناپنے سے نقطے مرتبہ کر دو، یہ نقطے قریب قریب ایک خط مستقیم کے گرد واقع ہوتے ہیں، اب ایک کالے

تاگے کو تان کر رکھنے سے وہ خط مستقیم حاصل کرو جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچ میں سے ہو کر گزرے

معلوم ہوتا ہے کہ اس خط پر ذیل کے دو نقطے واقع ہیں

$$۲۰ = ما، ۱۱ = لا \text{ اور } ۱۲۵۵ = ما، ۶ = لا$$

پس ربط  $ما = لا + ب$  میں انہیں مندرج کرنے سے

$$۱۲۵۵ = ۶ + ب \text{ اور } ۲۰ = ۱۱ + ب$$



تفریق کرنے سے  $۱۵ = ۷۵$  یعنی  $۱۵ = ۷۵$

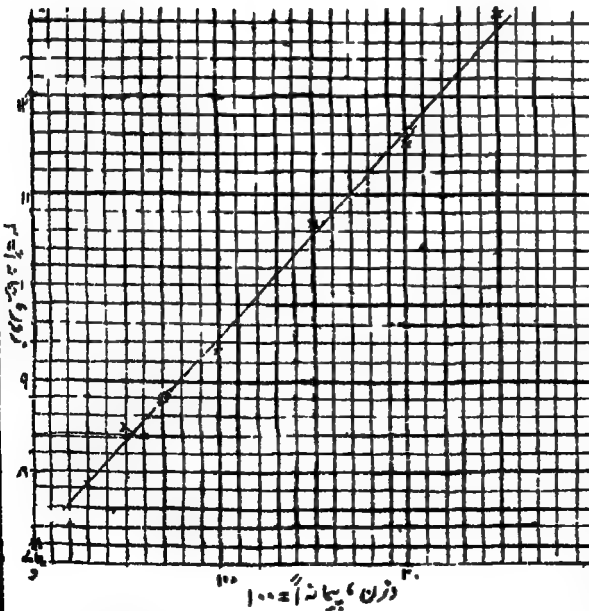
اسلئے  $۱۲۵ = ۱۵ + ۷۵$  پس  $۳۵ = ۱۲۵$

پس مطلوبہ ربط  $۱۵ = ۷۵ + ۳۵$  ہے۔

مشق ۳۔ محل میں ایک کرین یا آلہ کے ذریعہ وزن اٹھاتے وقت جو کرین کے دستہ پر عوداً زور لگانا پڑتا ہے اس کی قیمتیں ناپی گئی ہیں اور جدول ذیل میں درج ہیں

وزن (و)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰
زور (ز)	۷۲	۸۳	۹۳	۱۰۶	۱۱۵	۱۲۵	۱۳۹

وزن اور زور کا باہمی ربط دریافت کرو



وزنوں کو افقی

محور پر پیمانہ ایک انچ

$۱۰۰ =$  اور زوروں

کو انتصابی محور پر

پیمانہ ایک انچ  $= ۲$

کے موافق ناپاؤ فصلوں

کو صفر اور صغیروں کو

$۷$  سے ناپنا شروع کرو

وزن اور زور کی

متناظر قیمتوں سے نقطہ

مرتب کر کے کالے ناگے کے ذریعہ ایک مستقیم خط کا مقام معلوم کیا گیا ہے جو

یکساں طور ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ اس خط کی مساوات  $z = ۱۰ + ۱۰i$  ب پر ہے جہاں  $۱۰$  اور  $۱۰i$  مستقل مقداریں ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس خط پر دو نقطے ہیں

$$\begin{cases} z = ۱۰ + ۱۰i \\ z = ۱۱۰ + ۱۱۰i \end{cases} \text{ انہ } \begin{cases} z = ۱۰ \\ z = ۱۱۰ \end{cases}$$

جن کو مساوات میں درج کرنے سے  $۱۱۰ = ۱۰ + ۱۰i$  اور  $۱۱۰ = ۱۰ + ۱۰i$  تقریباً  $۱۱۰ = ۱۰ + ۱۰i$  یعنی  $۱۱۰ = ۱۰ + ۱۰i$  اور  $۱۱۰ = ۱۰ + ۱۰i$  پس مطلوبہ ربط  $z = ۱۱۰ + ۱۱۰i$  ہے۔

## امثلہ نمبری ۶

۱۔ گیہوں کا نرخ ۵ سیر فی روپیہ ہے اور چاولوں کا ۳ سیر فی روپیہ، ہر صودہ میں نرخ کا ترسیبی حاضر شمار ۱۰ اور ۲۰ سیر کی حدود کے اندر بناؤ اور معلوم کرو کہ  $\frac{۱}{۵}$  روپیہ کے کتنے چاول آئیں گے، نیز بتاؤ کہ ۱۳ سیر گیہوں کی کیا قیمت ہوگی۔

۲۔ ایک شخص کی رہائش اور خوراک وغیرہ کے اخراجات ایک ہونٹل میں ۱۵ روپے ۸ آنے فی ہفتہ ہیں، اس کو ترسیبی طریق پر ظاہر کرو۔

۳۔ ۳۰ نارنگیوں کی قیمت ۶ روپیہ ۴ آنے ہے، ایک سے ساٹھ تک نارنگیوں کی کسی تعداد کی قیمت ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو اور اس سے معلوم کرو کہ ۲۴ نارنگیوں کی کیا قیمت ہوگی اور ۹ روپے ۷ آنے کی کل ثابت نارنگیاں کتنی آئیں گی۔

۴۔ ایک کمرہ کا طول ۸ فٹ اور عرض  $\frac{۱}{۲}$  فٹ ہے، اور اس کے

اندر فرش لگانے کی کل لاگت ۳۶۵ روپے ہے، جن کمروں کے رقبے  $۱۲ \times ۱۵$  اور  $۶۳ \times ۶۵$  کے درمیان ہیں ان کے اندر فرش لگانے کی قیمت کا حاضر شمار کر دیا، نیز  $۱۹ \times ۲۱$  کمرہ کے اندر فرش لگانے کی قیمت ترسیم سے معلوم کر دے۔

۵۔ یہ فرض کر کے کہ چند جسم ایک سڑک پر یکساں رفتار سے حرکت کرتے ہیں، ایک ہی شکل میں ذیل کے معطیات کی بنا پر ان کی حرکتوں کی ترسیمیں بناؤ

مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار
د	۶ بجے صبح	۵ میل فی گھنٹہ د سے
د سے ۳ میل	۸ بجے صبح	۳ میل فی گھنٹہ د سے
د سے ۱۱ میل	۴ بجے شام	$۳\frac{1}{۲}$ میل فی گھنٹہ د کی طرف

۶۔ ایک شخص صبح کے ۷ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ اور شکل سے معلوم کر دو کہ وہ کس وقت مقام ابتدائی سے ۲۲ میل کے فاصلہ پر ہوگا اور ۲ گھنٹہ ۲۰ منٹ میں کس قدر فاصلہ طے کرے گا۔

۷۔ ایک ریل گاڑی  $\frac{1}{۲}$  گھنٹہ میں یکساں رفتار سے ۴۵ میل طے کرتی ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ، اس سے معلوم کر دو کہ کتنے وقت میں یہ ۱۷ میل طے کرے گی اور ۱۲ منٹ میں کتنے فاصلہ طے ہوگا۔

۸۔ ایک جسم ۳ فٹ فی سکینڈ کی رفتار سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ۳ سکینڈوں کے بعد اس کی رفتار  $۳ + ۲$  فٹ ہوتی ہے، اس کی رفتار کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کر دو کہ ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ سکینڈوں کے بعد

بالترتیب اُس کی رفتار کیا ہوگی، نیز معلوم کرو کہ کس وقت اس کی رفتار ۵، ۴، ۳، ۲، ۱۳۵ فٹ فی سکینڈ ہوگی۔

۹۔ دو شخص صبح کے ۶ بجے مقامات A اور B سے ایک دوسرے کی طرف بالترتیب ۴ اور ۳ میل کی رفتار سے چلنا شروع کرتے ہیں A اور B کا باہمی فاصلہ ۲۵ میل ہے، ترسیم بنانے سے معلوم کرو کہ وہ کب اور کہاں ایک دوسرے سے آئیں گے، ۱/۸ بجے ان کے درمیان کیا فاصلہ ہوگا اور ان کا درمیان فی فاصلہ ۶ میل کس وقت ہوگا۔

۱۰۔ دو جہاز ابتداءً ایک دوسرے سے ۸۰ میل کے فاصلہ پر ہیں اور ایک دوسرے کی طرف ۹ اور ۱۱ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے آنا شروع کرتے ہیں، ترسیم بنا کر دیکھو کہ وہ کب ایک دوسرے سے آئیں گے۔

۱۱۔ صبح کے ۷ بجے A، ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور اس کے آدھ گھنٹہ بعد B، ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اُسی سمت میں چلتا ہے، ترسیمی طریق پر معلوم کرو کہ B، A کو کہاں اور کس وقت جا ملیگا۔

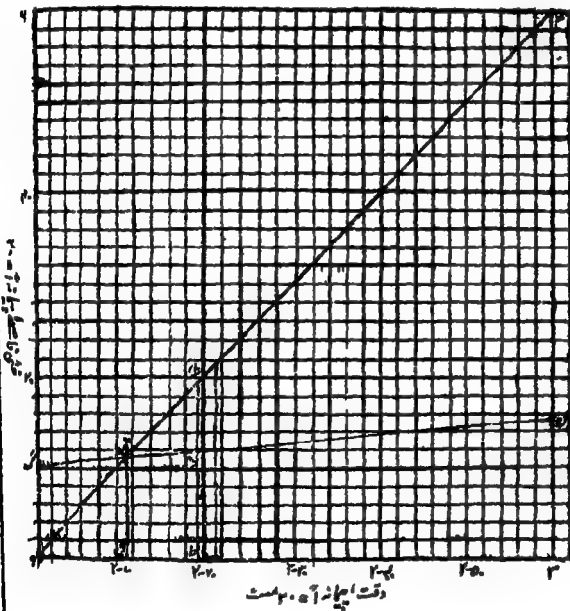
۱۲۔ صبح کے ۶ بجے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور ہر تین میل کے بعد آدھ گھنٹہ آرام کرتا ہے۔ B صبح کے ۹ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی مسلسل رفتار سے A کا پیچھا کرتا ہے، معلوم کرو کہ B، A سے کب اور کہاں جا ملیگا۔

۱۳۔ ایک سائیکل سوار صبح کے ۶ بجے حیدرآباد سے روانہ ہو کر بیدر کی سڑک پر ۱۱ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے مسلسل ۲ گھنٹے سفر کرتا ہے، اس کے بعد وہ آدھ گھنٹہ آرام کر کے ۹ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے واپس آتا ہے، ایک دوسرا سائیکل سوار ۱/۲ بجے صبح ۷ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حیدرآباد سے

روانہ ہوتا ہے بتاؤ کہ وہ دونوں کب اور کہاں ملیں گے۔

۱۴۔ دو سائیکل سوار ایک گول چکر کے گرد جس کا محیط ایک میل ہے ۱۰ میل اور ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک ہی نقطہ سے ایک ہی سمت میں روانہ ہوتے ہیں، بتاؤ کہ وہ ۳ گھنٹے میں ایک دوسرے سے کتنی دفعہ اور کہاں ملیں گے۔

۱۵۔ بتاؤ کہ ۲ اور ۳ بجے کے درمیان گھڑی کی سوئیاں کب (۱) ایک دوسرے پر منطبق ہوں گی اور (۲) ایک دوسرے سے ۵۴° اور ۶۰° کے زاوے



بنائیں گی۔

ظاہر ہے

کہ جب چھوٹی

سوئی ۵ منٹ

فاصلے طے

کرتی ہے تو

بڑی سوئی

پورا چکر لگاتی

ہے یعنی ۶۰

منٹ فاصلے

طے کرتی ہے، گویا ایک گھنٹے میں بڑی سوئی چھوٹی سوئی کی نسبت ۵ منٹ فاصلے زیادہ چلتی ہے۔

افقی محور پر وقت کو تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ  $(\frac{1}{10})$  ۲ منٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ہمیں ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیان وقت

سے سروکار ہے ۱ سائے ہم ۲ بجے کو ابتدائی نقطہ سے تعبیر کرتے ہیں۔  
 انتصابی محور پر فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ ۲ منٹ فاصلوں کو ظاہر کرتا ہے  
 اب چونکہ ۲ بجے بڑی سوئی نشان ۱۲ پر ہے اور ۶۰ منٹ میں یعنی ۳ بجے  
 تک ۶۰ منٹ فاصلے طے کرتی ہے ۱ سائے ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیان اسکی  
 ترسیم و م نقاط (۲، ۶۰) اور (۳، ۶۰) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے نیز چونکہ ۲ بجے گھنٹے کی سوئی ۱۲ بجے  
 کے نشان سے ۱۰ منٹ فاصلوں پر ہوگی اور ۶۰ منٹ میں صرف ۵ منٹ فاصلے  
 طے کرے گی اس لئے اس کی ترسیم خط گ ن نقاط (۲، ۱۰۰) اور (۳، ۱۵) کو  
 ملانے سے حاصل ہوگی۔ یہ دونوں خط نقطہ ق پر قطع کرتے ہیں پس  
 نقطہ ق کا فاصلہ دل اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جب گھڑی کی سوئیاں ایک  
 دوسرے پر منطبق ہوں گی۔ ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ سوئیاں ۲ بجکر ۹ و ۱۰  
 منٹ پر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گی۔

نیز جب کوئی سوئی ۶۰ منٹ فاصلے طے کرتی ہے تو ۶۰ کے زاویہ میں  
 سے گزرتی ہے ۱ سائے ظاہر ہے کہ جب ۲ بجے کے بعد سوئیوں کے درمیان  
 ۳۵ کا زاویہ ہوگا تو بڑی سوئی چھوٹی سوئی سے  $\frac{1}{4}$  منٹ فاصلے آگے  
 ہوگی۔ اب افقی محور پر نقطہ ط جو ۲ بجکر قریباً ۹ و ۱۰ منٹ کو ظاہر کرتا ہے  
 ایسا ہے کہ اس کے معینوں ط ط اور ط ط کا فرق  $\frac{1}{4}$  منٹ فاصلوں کے  
 برابر ہے، اس لئے ۲ بجکر ۹ و ۱۰ منٹ کے بعد گھڑی کی سوئیوں میں ۳۵  
 کا زاویہ بنے گا۔

اسی طرح ۶۰ کا زاویہ ۲ بجکر ۸ و ۹ منٹ پر بنے گا۔

۱۶۔ بتاؤ کہ ۷ بجے اور ۸ بجے کے درمیان گھڑی کی سوئیاں کب (۱) ایک  
 دوسرے کے مقابل ہوں گی (۲) ان کا درمیانی فاصلہ ۵ منٹ نشانوں کے

مسادہ ہوگا۔

۱۷۔ ایک نالی ایک حوض کو ۲۰ منٹ میں بھرتی ہے، دوسری ۲۴ منٹ میں، بتاؤ کہ دونوں مل کر (۱) آدھے حوض کو (۲) پورے حوض کو کتنی دیر میں بھرے گی، نیز معلوم کرو کہ ۶ منٹ میں حوض کا کتنا حصہ بھر جائے گا۔

۱۸۔ ایک نالی ایک حوض کو ۴ گھنٹے میں بھر سکتی ہے اور دوسری ۶ گھنٹے میں، پہلی نالی کو دوسری نالی کے ایک گھنٹہ پہلے کھولا گیا ہے، بتاؤ کہ دونوں ملکر پورے حوض اور آدھے حوض کو کتنی دیر میں بھرے گی۔

۱۹۔ ایک حوض کو ۲ ندیاں ۳ اور ۴ گھنٹے میں جدا جدا بھر دیتی ہیں، ایک تیسری نالی اُس کو پانچ گھنٹے میں خالی کر دیتی ہے، بتاؤ کہ اگر تینوں ندیوں کو ایک ساتھ کھول دیا جائے تو حوض کتنی دیر میں بھر جائے گا۔

۲۰۔ ایک کام کو ۱۱ دن میں اور  $\frac{1}{4}$  دن میں کرتا ہے، بتاؤ کہ وہ دونوں ملکر کتنے دنوں میں کرے گی۔

۲۱۔ ا، ب، ج ایک کام کو بالترتیب ۱۸، ۱۰، ۱۲ دن میں کرتے ہیں ابتدا میں ا اور ج ملکر دو دن کام کرتے ہیں اور پھر ب شریک ہو جاتا ہے بتاؤ کہ اور کتنے دنوں میں کام ختم ہوگا۔

۲۲۔ ایک شخص نے ایک گھوڑا ۷۰ روپے کو فروخت کر کے ۲۰ فیصد نقصان اٹھایا، بتاؤ کہ اس نے گھوڑا کتنے کو خریدا تھا۔

۲۳۔ ایک دستکار نے کسی دوکاندار کے پاس ایک چیز فروخت کر کے ۱۰ فیصد نفع اٹھایا اور دوکاندار نے اس پر ۲۵ فیصد نفع اٹھا کر اس کو ۱۳۲ روپے میں فروخت کیا۔ بتاؤ کہ اُس چیز پر اصل لاگت کیا آئی تھی۔

۲۴۔ ۵ روپے ۸ آنہ فی سیر والی چائے ۳ روپے ۴ آنہ فی سیر والی

چائے کے ساتھ کس نسبت سے ملائی جائے کہ آمیزہ کی قیمت ۴ روپے ۱۲ آنہ فی پونڈ ہو۔  
 ۲۵ - ایک امتحان میں مانسل کردہ نشانات زیادہ سے زیادہ ۱۶۰ ہیں اور کم سے کم ۶۵، ان نشانات کو اس طرح کم کیا جائیگا کہ ۱۶۰ کی بجائے ۱۰۰ ہو جائیں اور ۶۵ کی بجائے ۵۰، ایسا کرنے کے لئے ایک ترسیم بناؤ اور اس سے قریب ترین صحیح عدد تک معلوم کرو کہ جن پونڈوں کے نشانات ۱۳۵، ۷۵، ۶۲ تھے وہ اب کیا ہو جائیں گے۔

۲۶ - ایک گراموفون مع ۵ توں کے ۷ پونڈ میں آتا ہے، اسی گراموفون کی قیمت مع ۲۰ توں کے ۹ پونڈ ہے، بتاؤ کہ گراموفون مع ۵۰ توں کے کتنے میں آئے گا۔  
 [سول سروس]

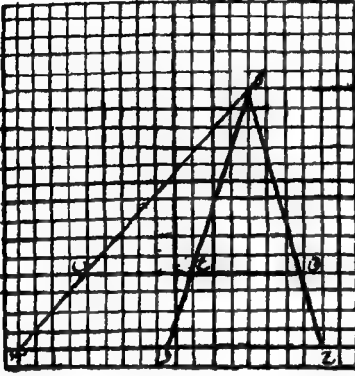
۲۷ - اینج اور سنٹی میٹر، پونڈ اور کلو گرام کے باہمی ربط کو ترسیبی طریق پر ظاہر کرو، معلوم ہے ایک اینج = ۲۵.۴ سنٹی میٹر اور ایک کلو گرام = ۲.۲ پونڈ، شکل سے معلوم کرو کہ ۳.۶ سنٹی میٹر، ۹.۵ سنٹی میٹر کتنے انچوں کے مساوی ہیں، نیز ۸ پونڈ کتنے کلو گراموں کے مساوی ہے۔

۲۸ - ۶۲ میل = ایک کلو میٹر، ان کے باہمی ربط کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو، ۴۱۵ اور ۵۵۰ میل کو کلو میٹروں میں بیان کرو، جواب قریب ترین دسویں کلو میٹر تک صحیح ہو۔

۲۹ - رومر ٹمپس پیا میں نقطہ انجماد صفر درجہ پر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۸۰ درجہ پر، فارن ہیت میں نقطہ انجماد ۳۲ درجہ پر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۲۱۲ درجہ پر، رومر اور فارن ہیت کے درجوں کی باہمی تحویل کے لئے ترسیم بناؤ، ۹۶ کوف، درجوں میں منتقل کرو اور ۵ ڈی ف کو ساہ درجوں میں۔



۳۰۔ ایک مثلث ا ب ج کے قاعدہ کے متوازی کئی خط کھینچو، ان کو مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ د سے ملاؤ، یہ وسطی ا د سب متوازیات کی تصنیف کرتا ہے، فرض کرو کہ ایک متوازی ن ق ہے اور اس کا وسطی



فاصلہ ا سے ا ع ہے وسطی  
فاصلوں کو بطور فاصلہ اور متوازیات  
کے طولوں کو بطور معین ان کر  
نقطے مرتسم کرو اور ترسیم بنانے  
سے ثابت کرو کہ متوازیات  
کے طول اپنے وسطی فاصلوں  
کے متناسب ہیں، ترسیم سے اس

متوازی کا طول معلوم کرو جس کا فاصلہ ا سے  $\frac{3}{4}$  بیچ ہو۔

۳۱۔ ترسیمی طریق پر ثابت کرو کہ ایک دائرہ کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے متناسب ہوتا ہے۔

کئی دائرے مربع دار کا غنڈ پر بناؤ، مربعے گننے سے ان کے رقبہ معلوم  
کرو، محور لا پر (نصف قطر) کی قیمتیں اور محور ہا ایر ان کے متناظر دائروں  
کے رقبہ ناپو وغیرہ وغیرہ۔

۳۲۔ ایک سر بیچ کے ذریعہ مختلف وزن اٹھانے میں جو قوتیں لگانی پڑتی  
ہیں وہ تجربہ کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور حسب ذیل ہیں۔

وزن پونڈوں میں	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
قوت	۵۵۶	۱۵۱۵	۱۵۵۸	۲۵۳۳	۲۵۹	۳۵۲۵

ان کو مرتسم کرنے سے دیکھو کہ قوت اور وزن قریب قریب متناسب ہیں،

معلوم کر دو کہ ۳۵ پونڈ وزن کو اٹھانے کے لئے کیا قوت درکار ہوگی۔  
 ۳۳ - ایک مشین میں مختلف وزنیوں کو اٹھانے کے لئے جو زور درکار ہوتے  
 ہیں ان کی قیمتیں جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

وزن کو	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
زور، ز	۱۰۶	۱۲۲	۱۵۲	۱۸۳	۲۱۶	۲۴۶	۲۷۸

ان قیمتوں سے نقطہ متسم کر دو اور یہ مان کر کہ وزن اور زور میں خطی کلیہ  $W = a + b$  پایا جاتا ہے اور ب کی قیمتیں معلوم کر دو ترسیم سے اور نیز سادات سے قریب ترین صحیح عدد تک  
 ز کی قیمت معلوم کر دو  $b = ۳۵۰$  اور و کی قیمت معلوم کر دو جب  $z = ۱۵۸$  [سول مہر دس]  
 ۳۳ - چرخوں کے ایک نظام میں زور اور وزن کا باہمی ربط معلوم کر کے  
 کے لئے تجربہ کی بنا پر اعداد ذیل حاصل کئے گئے ہیں۔

وزن، و	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳
زور، ز	۳۵۸	۵۶۸۳	۸۵۲	۱۰۵۱۱	۱۱۵۹	۱۳۵۶	۱۶۵۵	۱۸۵۵	۲۰۵۸

دیکھو کہ ز اور و میں خطی کلیہ  $W = a + b$  موجود ہے یا نہیں اگر ہو تو لا اور ب  
 کی بہترین قیمتیں معلوم کرو۔

۳۵ - لا اور و کی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، ان میں سے بعض  
 قدرے غلط ہیں، ان کے ربط کو ظاہر کرنے والی مناسب ترین ترسیم کیجیو۔

لا	۱	۴	۵۵	۷	۹۵۵	۱۱	۱۳	۱۵
و	۳۵۵	۸	۱۰۴۷	۱۳	۱۵۵۲	۱۸۵۳	۲۱	۲۴۵۲

و کی قیمت معلوم کر دو جب  $l = ۳۵$  اور لا کی قیمت معلوم کر دو جب  $w = ۴۲$   
 ۳۶ - برقی رو کی مدد سے چلنے والے ایک پمپ کی جانچ کرنے سے نتائج  
 ذیل حاصل ہوئے، اگر ق برقی اسپی قوت پمپ پر لگائی جائے تو ب

اسی قوت فی الحقیقت پانی اُٹھانے میں صرف ہوتی ہے

ق	۳۶۵۷	۵۶۶۳	۷۶۸۵	۹۶۸۷	۱۱۶۷۳
ب	۱۶۵	۲۶۷۵	۴۶۳	۵۶۷	۶۶۷۵

ق اور ب کا باہمی ربط معلوم کرو۔

۳۷۔ روپے کے ایک نل کے وزن فی مثلاً جیک نل کی موٹائی  $\frac{1}{4}$  انچ ہو جب دلی نل میں درج ہیں۔

قطر	۱	۵	۲	۲۶۵	۳	۳۶۵	۴	۴۶۵	۵
وزن	۷۶۷	۹۶۸	۱۲۶۳	۱۳۶۷	۱۷۶۲	۱۹۶۶	۲۲۶۱	۲۴۶۵	۲۷

اس میں ق نل کے کھوکھلے حصہ کا قطر ہے انچوں میں اور د وزن ہے پونڈوں میں، ایک ترسیم کھینچو جو ق اور و کے باہمی ربط کو تعبیر کرے اور اُس نل کا وزن فی فٹ معلوم کرو جس کا قطر  $\frac{1}{4}$  ۳ انچ ہو۔ [سول سرس]

### عام ترسیمیں

۲۷۔ پچھلی چند دفات میں ہم نے دیکھا کہ اگر دو بدنے والی مقداریں باہم اس طرح متعلق ہوں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسری کی قیمت میں ایک متناظر تبدیلی پیدا کرے تو ان مقداروں کی متناظر قیمتوں کے مختلف جوڑوں سے مختلف نقطے ترسیم کئے جاسکتے ہیں اور ان نقطوں کو ایک خط کے ذریعہ ملانے سے ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے جو ان مقداروں کے تغیرات کو ہندسی طریق پر ظاہر کرتی ہے، اوپر کی سب مثالوں میں یہ نقطے قریب قریب ایک خط مستقیم پر واقع

ہوتے تھے جو ترسی کی تعمیر کی ایک خاص صورت ہے، لیکن ہم آگے چل کر دیکھنے لگے کہ کسی دو متعلقہ متغیروں کی متناظر قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے وہ عام طور پر ایک خط مستقیم پر واقع نہیں ہوں گے بلکہ بظاہر بیقاعدہ طور پر مختلف سمتوں میں اور مختلف فاصلوں پر اوپر نیچے کہیں واقع ہوں گے۔

جب ترسیم پر کے نقطے ایک مساوات سے حاصل کئے جائیں تو وہ تعداد میں پیشمار ہونگے کیونکہ مساوات کے حل پیشمار ہیں، اس لئے اس صورت میں نقطے ایک دوسرے سے اتنا قریب ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اور نزدیک نزدیک کے نقطوں میں سے ایک مسلسل سٹپنی گزر سکتا ہے، پس معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی ترسیم ہمیشہ مسلسل ہوگی۔

لیکن جب متغیروں کی قیمتیں تجربہ یا مشاہدہ کی بنا پر معلوم کی جائیں تو ظاہر ہے کہ اولاً ان کی قیمتیں بالکل صحیح نہیں ہوں گی غلطی کا احتمال ان میں ضرور باقی رہے گا، اس لئے ان قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے ان کے مقامات کی صحت پر ہم پورا اعتبار نہیں کر سکتے۔ دوسرے چونکہ مشاہدات کی تعداد لا انتہا نہیں ہو سکتی اسلئے ضروری ہے کہ ہمیں متناظر قیمتوں کے محدود جوڑے ملیں اور ان سے جو نقطے حاصل ہوں وہ بھی تعداد میں محدود ہوں، اس حصہ کی مثالیں اکثر اعداد و شمار اور طبی مقادیر کے باہمی روابط پر مشتمل ہونگی۔ یہ اعداد و شمار بالعموم مشاہدہ اور تجربہ سے حاصل ہوں گے اس لئے ان کے

متعلقہ نقطوں کی تعداد بھی محدود ہوگی، ہم دیکھینگے کہ خاصکر اعداد و شمار کے سوالوں میں ان نقطوں کی تعداد آٹھ یا دس سے شاذو نادر ہی زیادہ ہوگی۔

پس فرض کرو کہ کسی خاص سوال سے ہم نے آٹھ یا دس نقطوں کو ایک شکل میں دو قائم محوروں کے لحاظ سے مرتبہ کر لیا ہے اور یہ نقطے شکل میں موجود ہیں، اب یہ سوال ہے کہ ان نقطوں کو کسی طرح ملایا جائے کہ ترسیم مطلوبہ حاصل ہو جو مقادیر زیر بحث کے ربط کو صحیح طور پر ظاہر کرے۔

(۱) پہلا طریقہ یہ ہے کہ نقطوں کو بالترتیب خطوط مستقیم سے ملایا جائے۔ دو نقطوں کو ملانے سے ایک خط حاصل ہوگا اور آٹھ نقطوں کو اس طرح ملانے سے سات سیدھے خط ملینگے جو ایک دوسرے سے کوئی زاوے بنائینگے پس ترسیم اس صورت میں ایک بے قاعدہ شکستہ خط ہوگی جس میں ترسیم کی سمت ہر نقطہ مرتبہ پر ایک نکتہ بدلے گی، مبتدی کے لئے بہتر ہوگا کہ اعداد و شمار اور قیمتوں کی ترسیمیں بنانے میں مختلف نقطوں کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ہی ملائے، کئی اخباروں میں موسم کے حالات کے متعلق چارٹ یا نقشے شائع ہوتے ہیں، ان میں وقت اور بارش کے ارتقاع کی متناظر قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں ان کو بالعموم سیدھے خطوں سے ہی ملایا جاتا ہے۔

(۲) دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ان متعدد نقطوں میں سے ایک

سادہ ترین مسلسل منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے دفعہ ۲۱ میں ہم نے چند ایسی مثالیں حل کی ہیں جہاں مقادیر متعلقہ کو مرتب کرنے سے جو نقطے حاصل ہوتے تھے وہ قریب قریب ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے تھے، ہم نے ان کے عین درمیان میں سے مناسب ترین خط مستقیم کھینچ کر مقداروں کے ربط کو اس سے ظاہر کیا۔ لیکن جب یہ نقطے اس طرح ایک خط مستقیم کے ساتھ ساتھ واقع نہ ہوں اور تعداد میں بھی محدود ہوں تو اس صورت میں اس منحنی کا معلوم کرنا جو صحیح طور پر مقداروں کے تغیرات کو تعبیر کرے ذرا مشکل امر ہے کیونکہ نقاط مرتبہ کی محدود تعداد میں سے کئی منحنی گزرے جاسکتے ہیں، یہ صرف شق پر مبنی ہے کہ کسی خاص صورت میں طالب علم ان محدود نقطوں میں سے گزرنے والے سادہ ترین منحنی کا انتخاب کر سکے، بہر حال تمام صورتوں میں بہترین تجویز یہ ہوگی کہ ہاتھ سے ہی ایک ایسا مسلسل منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے جو نقاط کے اضافی مقامات کا لحاظ کرتے ہوئے مناسب ترین ہو۔

ظاہر ہے کہ یہ منحنی بعض بعض نقطوں میں سے گزریگا اور باقی نقطے یکساں طور پر اسکے دونوں جانب واقع ہونگے۔ یہ مناسب ترین منحنی حدود ترسیم کے اندر متعلقہ مقادیر کے ربط کو اوسط درجہ صحت تک تعبیر کرے گا اور بعض حالتوں میں ہم اسکی سادہ ترین مقادیر کے جبر یہ ربط کو بھی معلوم کر سکیں گے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم مطلوبہ حاصل کرنے کے لئے نقطہ زیر بحث کو دو طرح سے ملایا جاسکتا ہے خطوط مستقیم کے ذریعہ یا ایک مسلسل منحنی سے، لیکن ظاہر ہے کہ نقطوں میں سے گزرنیوالا مسلسل منحنی مقداروں کے ربط کو زیادہ صحیح طور پر ظاہر کریگا کیونکہ اس میں منحنی کا انحناء یا جھکاؤ بالتدریج کم یا زیادہ ہوگا اور سمت کی تبدیلی اس میں دفعۃً واقع نہیں ہوگی جیسے شکستہ ترسیم میں جو اکثر اوقات آرہ کے دندانوں کی طرح ہوتی ہے۔ طالب علم جیسے تدریسی تعبیر میں آگے ترقی کریگا اسے معلوم ہوگا کہ معمولی مساواتوں کی ترسیمیں جو اکثر اوقات عام اور طبیعی علموں کو تعبیر کرتی ہیں صاف، بے کونہ، مسلسل منحنی ہوتی ہیں، ان میں جھکاؤ بتدریج پیدا ہوتا ہے، جب ہم کسی طبیعی عمل یا ربط کو ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرنا چاہیں تو یاد رہے کہ ترسیم میں تیز زاوے اور دندانے نہیں ہونے چاہئیں اس صورت میں نقاط مرتبہ کو سیدھے خطوط سے ملانے کی بجائے حتی الوسع مسلسل منحنی سے ملانے کی کوشش کی جائے، کرہ ہوائی کی پیش اور بارپچا کے ارتفاع کو مرتسم کرنے کے لئے کئی خود رسمی اوزار آج کل مروج ہیں، طالب علم دیکھے کہ ان اوزاروں کے مرتسم خطوط میں تیز زاوے اور سمت کا یک لخت بدلنا نہیں پایا جاتا۔

۲۸ - اعداد و شمار کی ترسیمیں - ایک ملک کی آبادی، حاصل، اخراجات درآمد و برآمد، تعداد مدارس، تعداد طلبہ وغیرہ

سب اعداد و شمار کی مثالیں ہیں، ظاہر ہے کہ ان میں سے کسی ایک کو ایک متغیر اور وقت کو دوسرا متغیر فرض کر کے ہم ہر صورت میں ترسیم باسانی بنا سکتے ہیں، ترسیمی تعبیر کا عملی فائدہ اور دلچسپ استعمال زیادہ اسی میں ہے کہ مختلف اعداد و شمار کی ترسیمیں بنائی جائیں اور ان سے کار آمد نتائج اخذ کئے جائیں۔

چند توضیحی مثالیں طالب علم کو ترسیات کی اس شاخ کی دلچسپی اور اہمیت سے پورا واقف کر دینگی اور وہ ان کے استعمال سے پورا لطف اٹھا سکے گا۔

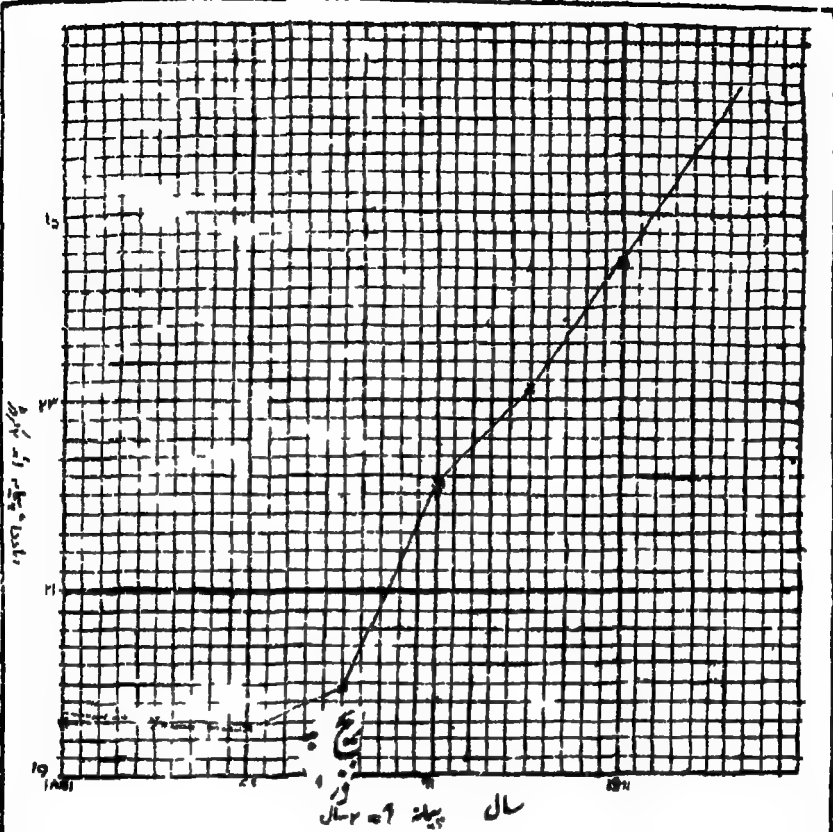
مشق ۱۔ برٹش انڈیا کی آبادی کروڑوں میں سنہ ۱۸۶۱ اور ۱۹۱۱ کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

سال	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
آبادی	۱۹۶۰۰	۱۹,۵۸۳	۱۹,۵۹۷	۲۲,۱۳۸	۲۳,۱۶۱	۲۳,۵۲۷

اس کو ترسیمی طریق پر تعبیر کر دے، اگر آبادی کی کمی بیشی کی شرح دو متصل مردم شماریوں کے درمیان یکساں فرض کی جائے تو (۱) معلوم کرو کہ ۱۸۵۷، ۱۸۸۹، ۱۹۰۳ میں اس کی آبادی کیا تھی (۲) ۱۹۱۳، ۱۹۲۱ میں اس کی آبادی کیا ہوگی (۳) ترسیم کو دیکھنے سے معلوم کرو کہ اسکی آبادی ۲۶ کروڑ کب ہوگی (۴) نیز معلوم کرو کہ کن دو مردم شماریوں کے درمیان شرح اضافہ زیادہ سے زیادہ ہے۔

وقت یعنی سالوں کو محور کا پر تاپو۔ پیمانہ ۲۰ سال یعنی ایک چھوٹا





حصہ ۲ سال کو تعبیر کرتا ہے۔

نیز آبادی کو محور ما پر ناپو۔ پیمانہ ۱۷ کروڑ اس میں ایک چھوٹا حصہ ۲ کروڑ کو تعبیر کرتا ہے۔

ہمیں ضلوں کو ۱۸۶۱ء سے ناپنا شروع کرنا چاہئے کیونکہ جدول میں پہلی آبادی اسی سال سے شروع ہوتی ہے، لیکن چونکہ ہمیں ۱۸۵۷ء کی آبادی شکل سے معلوم کرنا ہے، اس لئے فصلوں کو ۱۸۵۱ء سے ناپنا مناسب ہوگا، نیز ہمیں ۱۹۲۱ء کی آبادی معلوم کرنا ہے اس لئے شکل کے آخر میں اس کی گنجائش رکھنی چاہئے، اس لحاظ سے افقی

محور کو اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ۱۸۵۱ سے ۱۹۲۱ تک کے تمام سال اسی میں آجائیں۔

نیز جدول میں کم سے کم آبادی ۱۹۵۶۰۰ کروڑ ہے، اس لئے انتخابی محور پر معینوں کو ۱۹ سے ناپنا مناسب ہوگا۔

اب ہم نقاط (۱۸۶۱، ۱۹۵۶۰۰)، (۱۸۷۱، ۱۹۵۸۴)، وغیرہ کو مرسم کرتے ہیں، اس طرح ہمیں ۶ نقطے حاصل ہوتے ہیں جنکو حسب ذیلہ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا گیا ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ ہر دس سال کے عرصہ میں آبادی یکساں طور پر بڑھتی یا گھٹتی ہے۔

۱۸۵۷ کی آبادی معلوم کرنے کے لئے ترسیم کے پہلے خط کو پیچھے کی طرف نقطوں کے ذریعہ خارج کرو اور دیکھو کہ افقی محور پر جو نشان ۱۸۵۷ کو تعبیر کرتا ہے اس پر کا معین ترسیم کو تقریباً  $\frac{3}{4}$  حصے افقی محور سے اوپر کاٹتا ہے، اب چونکہ معین ۱۹ کروڑ سے ناپے گئے ہیں اس لئے ۱۸۵۷ کی آبادی = ۱۹۵۶۱ کروڑ تقریباً، لیکن یاد رہے کہ پہلے خط کو پیچھے کی طرف خارج کرنے سے ہم نے فرض کر لیا ہے کہ ۱۸۶۱ سے پہلے چند سالوں میں آبادی کی شرح تبدیلی وہی ہے جو ۱۸۶۱ اور ۱۸۷۱ کے درمیان ہے۔

اسی طرح ۱۸۸۹ کی آبادی ۲۱۵۷ کروڑ ہے

۱۹۰۳ ~ ۲۳۵۴۱ کروڑ ہے

اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ۱۹۱۱ کے بعد بھی آبادی کے اضافہ کی شرح وہی رہے گی جو اس سے پہلے دس سالوں میں ہم نے مان لی ہے تو اس بنا پر

۱۹۱۳ میں آبادی ۷۸ ۲۴۵ کروڑ ہوگی

۱۹۲۱ " ۹ ۲۵۵ کروڑ ہوگی

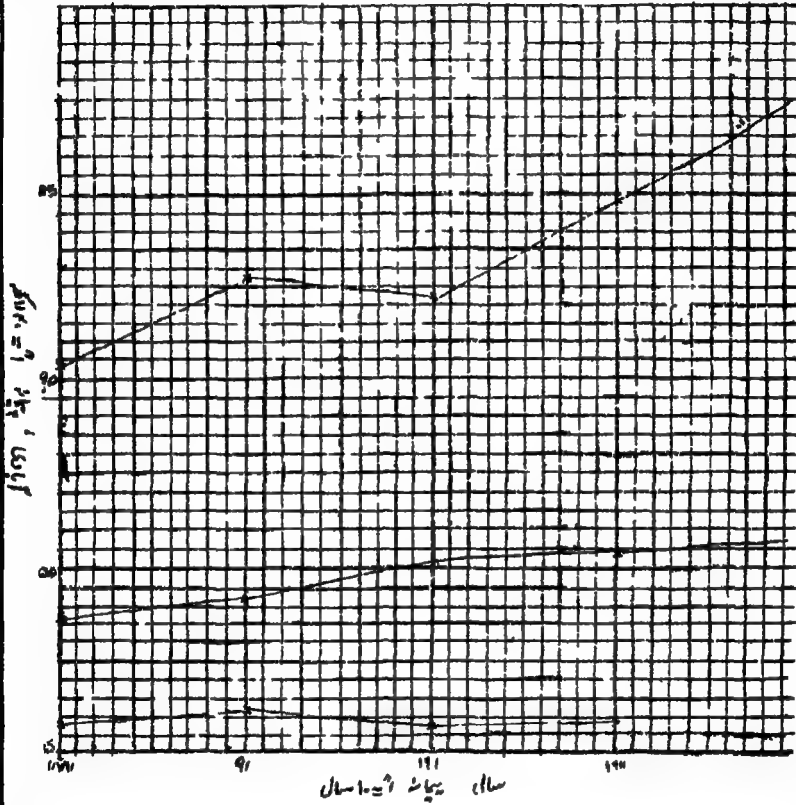
یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آبادی ۲۶ کروڑ کب ہوگی ہم محور ما پر کے ۲۶ کروڑ والے نشان میں سے ایک خط افقی محور کے متوازی کھینچے ہیں، جہاں یہ خط ترسیم سے ملتا ہے اس نقطہ کا فاصلہ مطلوبہ سال کو ظاہر کرے گا یہ فاصلہ ۱۹۲۱ سے کچھ زیادہ ہے، پس ۲۶ کروڑ کی آبادی ۱۹۲۱ اور ۱۹۲۲ کے درمیان ہوگی۔

شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۱۸۷۱ سے ۱۸۸۱ تک آبادی قریب قریب مستقل رہتی ہے کیونکہ یہ خط تقریباً افقی ہے پھر ۱۸۸۱ سے ۱۸۹۱ تک بڑھتی ہے، ۱۸۸۱ سے ۱۸۹۱ تک بہت سرعت سے بڑھتی ہے کیونکہ ان سالوں کا درمیانی خط اور خطوں کی نسبت مقابلتہ زیادہ عمودی ہے، پھر ۱۸۹۱ سے ۱۹۱۱ تک آبادی کا اضافہ قریب قریب مستقل ہے۔

مشق ۲۔ ممالک محروسہ سرکار عالی حیدر آباد دکن، ریاست میسور اور بڑودہ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۸۱ اور ۱۹۱۱ کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہیں

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
نیا حیدر آباد دکن	۹۸۵	۱۱۵۶	۱۱۱۵	۱۳۳۶
ریاست میسور	۴۱۵۹	۴۹۶۴	۵۵۶۴	۵۸۶۴
ریاست بڑودہ	۲۱۶۸	۲۴۶۲	۱۹۶۵	۲۰۶۳

ان اعداد کو ایک ہی شکل میں ترسیعی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ (۱) ۱۸۸۵ اور ۱۹۰۸ میں تینوں ممالک کی آبادیاں کیا تھیں (۲) اگر آبادی کے اضافہ کی شرح یکساں رہے تو بتاؤ کہ ۱۹۱۵ اور ۱۹۳۱ میں انکی آبادیاں



کیا ہونگی، (۳) نیز معلوم کرو کہ ممالکِ محورہ کی آبادی  $\frac{1}{4}$  کروڑ کب ہو جائے گی۔

سالوں کو افقی محور پر تعبیر کرو، پیمانہ ۱ = ۱۰ سال اور فضلوں کو ۱۸۸۱ سے ناپنا شروع کرو، آبادی کو محور ماب پر ناپو، پیمانہ ۱ = ۴۰ لاکھ یعنی ایک چھوٹا حصہ = ۴ لاکھ اور چونکہ جدول میں سب سے چھوٹی آبادی ۱۹۵۵

لاکھ ہے اسلئے معینوں کو ۱۵ لاکھ سے ناپنا مناسب ہو گا دیکھو شکل - اسی پیمانہ کے بموجب جدول بالا کے سب نقطے مرتبہ کئے گئے ہیں اور ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے آبادیوں کی ترسیمیں حاصل کی گئی ہیں ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر کہ ۱۸۸۵ء میں حیدر آباد کی آبادی تقریباً ۱۰۵ لاکھ تھی، میسور کی ۴۷ لاکھ، بڑودہ کی تقریباً ۲۲ لاکھ

۱۹۰۸ " " ۱۲۶ " " ۵۷۶۵ " " ۲۱ ۱/۲ لاکھ

۱۹۱۵ " " ۱۲۲۱۰ لاکھ ہوگی " " ۵۹۶۶ لاکھ " " ۲۲ لاکھ

اگر محور ماپر کے ۱/۲ کروڑ واٹے نشان میں سے ایک افقی خط کھینچا جائے تو وہ ترسیم سے نقطہ د پر ملے گا، د کا فاصلہ مطلوبہ سال کو تعبیر کرتا ہے جو ۱۹۱۸ سے کچھ کم ہے، پس مالک محروسہ کی آبادی ۱۹۱۸ میں ڈیڑھ کروڑ ہونی چاہئے۔

مشق ۳۔ مالک محروسہ سرکار عالی ریاست حیدر آباد دکن کے سرکاری مدرسوں میں ۱۳۲۱ء فصلی سے ۱۳۲۵ء فصلی تک ہر سال کے آخر میں طلبہ کی جو تعداد تھی وہ جدول ذیل میں درج ہے۔

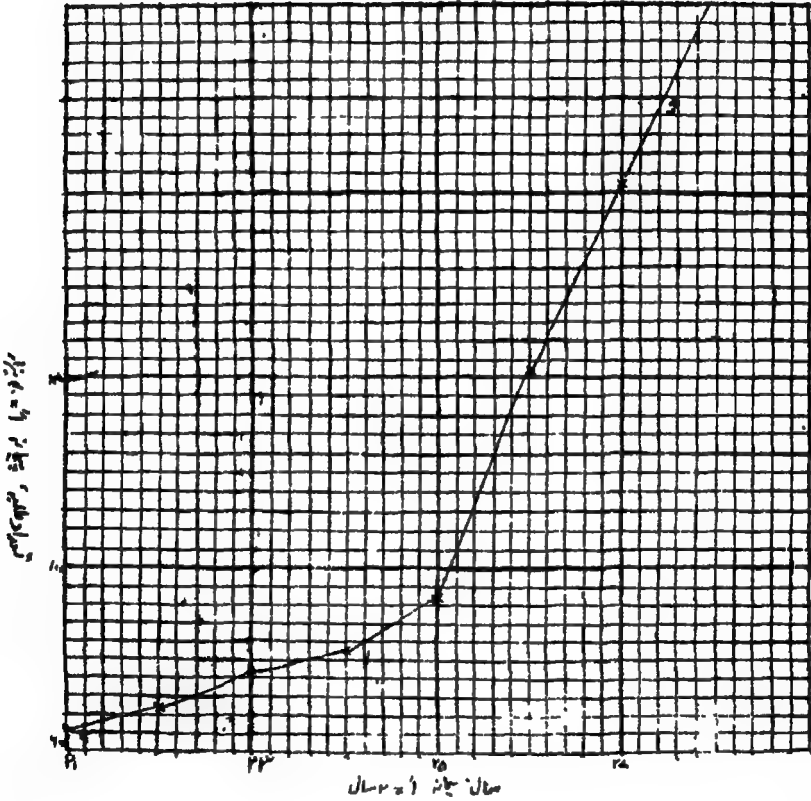
سال	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد طلبہ	۶۵۱۰۲	۶۹۶۷۴	۷۵۵۸۲	۸۲۷۷۸	۵۳۲۸۹	۱۵۰۶۷۳	۱۸۶۹۸۷

ان اعداد کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ ۲ لاکھ کی تعداد کس سال میں ہوگی۔ نیز ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ کس سال کے دوران میں طلبہ کی تعداد میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا۔

حسب سابق سالوں کو محور لا پر تعبیر کرو پیمانہ  $۲ = ۱$  سال، فصلوں کو ۱۳۲۱ء سے ناپنا شروع کرو۔

تعداد طلبہ کو محور ما پر ناپلو کیا نہ اُ ۴۰ ہزار اور معینوں کو ۶۰ ہزار سے ناپنا شروع کرو۔

ان پیمانوں کے موافق جدول بالا کے نقطے مرتسم کئے گئے ہیں اور ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے ترسیم حاصل کی گئی ہے۔



یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ۲ لاکھ کی تعداد کب ہوگی محور ما پر ۲ لاکھ والے نشان میں سے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ترسیم سے نقطہ ۱ پر ملے، تب نقطہ ۱ کا غصلہ سال مطلوبہ کو ظاہر کریگا پس ۲ لاکھ کی تعداد ۱۳۲۸ء ضلی کے اختتام سے پہلے ہو جائے گی۔

کسی ایک سال مثلاً ۱۳۲۷ ف میں طلبہ کی تعداد میں جو اضافہ ہوا وہ ۱۳۲۳ ف اور ۱۳۲۴ ف کے معیوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے پس شکل سے ظاہر ہے کہ ۱۳۲۶ ف میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا

۲۹ - قیمتیں - قیمتوں کی کئی مثالیں علم حساب کے متعلق خطی کلیہ کے تحت میں اس سے پہلے آچکی ہیں، وہاں کسی چیز کی قیمت یکساں طور پر بدلتی تھی اس لئے اسکی تسیم ایک مستقیم خط تھی، لیکن ضروری نہیں کہ کسی چیز کی مقدار اور اس کی قیمت میں سیدھا تناسب ہو یعنی قیمت یکساں طور پر بدلے کیونکہ ایسا ممکن ہے کہ کسی معیاری ناپ کی اشیاء کی تیاری میں زیادہ سہولت ہو اور اس لئے لاگت کم لگے، بر خلاف اس کے اس سے بڑے یا چھوٹے ناپ کی اشیاء کے لئے خاص طور پر اہتمام کرنے کی وجہ سے یا کئی اور وجوہات کی بناء پر نسبتاً زیادہ صرفہ اٹھانا پڑے، پس ایسی صورتوں میں جب کسی چیز کے ناپ اور قیمت میں سیدھا تناسب نہ ہو تو قیمت اور ناپ کے مختلف جوڑوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے وہ اعداد و شمار کے نقاط کی طرح بیقاعدہ طور پر اوپر نیچے کہیں واقع ہوں گے، اگر کوئی مسلسل منحنی ان میں سے گزر سکے تو وہ قیمت کے تغیرات کو مناسب طریق پر تعبیر کرے گا، مگر مبتدی کے لئے بہتر ہے کہ وہ ان نقاط کو بھی خطوط مستقیم کے ذریعہ ملائے۔

مشق ۱ - ایک فہرست میں کپڑے رکھنے کے فولادی ٹرنکوں کی

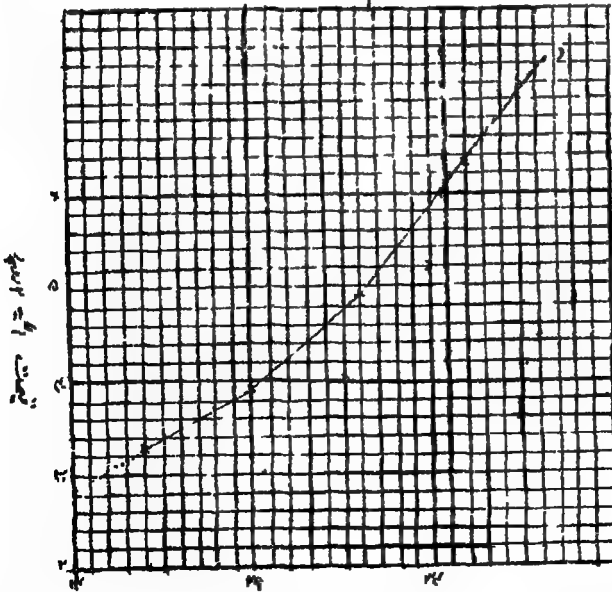
قیمتیں حسب ذیل ہیں -

ٹرینک کا طول انچوں میں	۲۶	۲۹	۳۲	۳۵
قیمت روپوں میں	$۳۲ \frac{۱}{۴}$	$۳۹ \frac{۱}{۴}$	$۴۶ \frac{۱}{۴}$	$۵۵ \frac{۱}{۴}$

ان کو ترسیبی طریق پر تعبیر کرو اور ۲۴، ۲۸، ۳۰، ۳۶، ۴۰ کے ٹرینکوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو نیز معلوم کرو کہ ۷۵ روپے میں جو ٹرینک آئے گا اُس کا طول کیا ہو گا۔

طولوں کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ =  $\frac{۱}{۴}$  انچ ٹرینک کا طول، فصلوں کو ۲۴ سے ناپنا شروع کرو۔

قیمتوں کو انتصابی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ۲ روپے، معینوں کو ۲۰ سے ناپنا شروع کرو (۲۶،  $۳۲ \frac{۱}{۴}$ )، (۲۹،  $۳۹ \frac{۱}{۴}$ )، ... کو مرتبہ کرو اور ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملاؤ۔



۲۴ انچ طول کا  
ٹرینک کی قیمت  
معلوم کرنے کیلئے  
پہلے خط کو پیچھے  
کی طرف نقطوں  
کے ذریعہ خارج  
کرو حتیٰ کہ یہ  
انتصابی محور  
سے آئے۔

طول = ۹۱ = ۵۰ انچ طول



نیز ۳۶ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت معلوم کرنے کے لئے آخری خط کو ذرا آگے کی طرف خارج کرو۔

شکل کو دیکھنے سے ۲۲ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت تقریباً  $\frac{1}{4}$  ۲۸ روپے ہے

" ۳۴ " " " ۲۸ "

" ۴۳ " " " ۳۰ "

" ۶۸ " " " ۳۶ "

اب ۵ روپے والے ٹرنک کا طول معلوم کرنے کے لئے محور ما پر کے اس نقطہ سے جو ۵ روپیہ کو تعبیر کرتا ہے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ترسیم سے د ب لے د کا فضلہ طول مطلوبہ کو ظاہر کرے گا جو تقریباً  $\frac{1}{4}$  ۳۴ انچ ہے۔

بعض تاجر مختلف ناپوں کی کسی چیز کو فروخت کے لئے موجود رکھنا چاہتے ہیں، وہ پہلے مختلف ناپوں میں اس چیز کے تین چار نمونے تیار کرتے ہیں اور ان کی لاگت کا اندازہ کر لیتے ہیں، ان نمونوں کی بنا پر ایک ترسیم بنا کر وہ درمیان کے ناپوں کے لئے قیمتوں کی ایک وسیع فہرست شائع کر سکتے ہیں۔

بیمہ فذ اور سالیانہ وغیرہ کے سوالات میں بھی ترسیمی طریقوں کا استعمال ہو سکتا ہے۔ ہر شخص چاہتا ہے کہ اپنے ایام پیری کے لئے ایک معقول رقم جمع رکھنے کا کوئی پختہ انتظام کر سکے یا اپنی وفات کے بعد اپنی بیوی اور بچوں کے لئے کچھ سرمایہ چھوڑ جائے۔ آج کل کئی کمپنیاں اور بنک خاص شرائط پر اس قسم کا معاہدہ کرنے کے لئے تیار ہیں کہ اگر کسی خاص عمر کا کوئی شخص

ایک مقررہ معمولی رقم باقاعدہ طور پر سالانہ ادا کرنے کے لئے تیار ہو تو وہ کمپنی اس کے عوض میں ایک بہت بڑی رقم بوڑھے ہونے پر اسکو یکمشت ادا کرے گی یا اگر وہ اس سے پہلے کسی وقت فوت ہو جائے تو اس کی ہدایات کے بموجب اس کے پس ماندگان میں سے کسی ایک کو یہی رقم یکمشت دیگی۔ ایک خاص صورت میں فرض کرو کہ ۲۱ سال کی عمر کا ایک شخص یہ انتظام کرنا چاہتا ہے کہ اگر وہ ۵۵ سال کی عمر تک زندہ رہے تو اس کو ۲ ہزار روپیہ کی ایک رقم یکمشت مل جائے یا اگر وہ اس سے پہلے کسی وقت فوت ہو جائے تو بھی یہی رقم اس کے بیوی بچوں کو یکمشت ادا کی جائے، وہ ایک کمپنی کی طرف رجوع کرتا ہے جو اس کی عمر اور صحت کا تسلی بخش طریقہ پر طبی معائنہ کر کے ایک پالیسی جاری کرتی ہے جسکی رو سے وہ معاہدہ کرتی ہے کہ اگر وہ شخص تاحیات یا ۵۵ سال کی عمر تک ہر سال باقاعدہ طور پر ایک معمولی رقم مثلاً ۱۵ روپے ادا کرتا رہے گا تو وہ ۲۰ ہزار روپیہ کے مطابق ۲ ہزار روپیہ ادا کرے گی۔

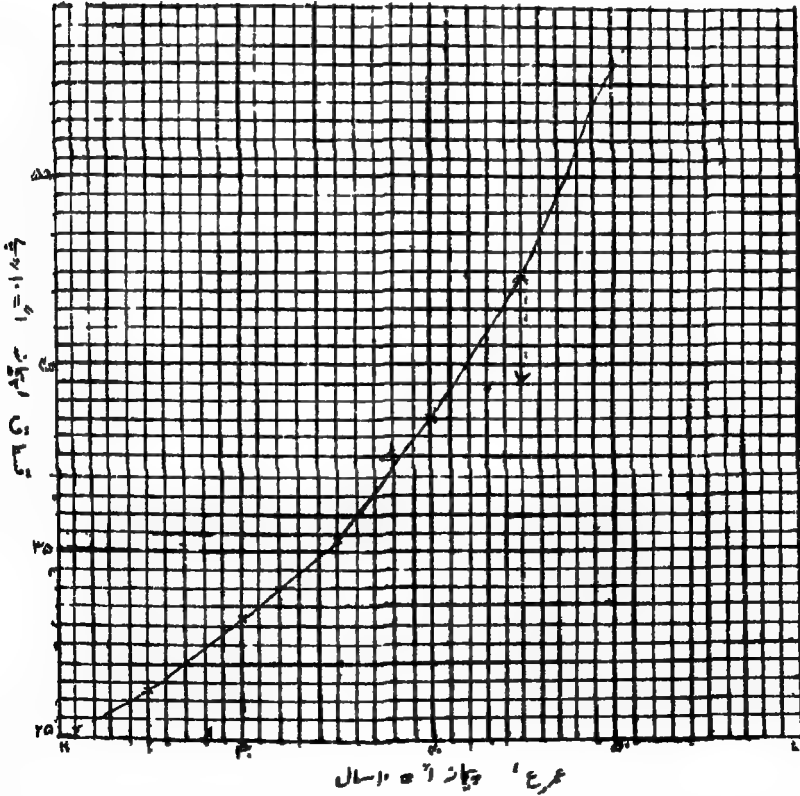
ظاہر ہے کہ سالانہ قسط کی مقدار اس شخص کی عمر کے لحاظ سے مقرر کی جائے گی، اگر اس کی عمر مقابلہ بڑی ہوگی تو ۲ ہزار روپیہ اس طرح محفوظ کرنے کے لئے اسے سالانہ ۱۵ روپے سے زیادہ ادا کرنا پڑے گا۔

مشق ۲۔ کسی خاص عمر ع پر ۱۵۰۰ روپے کے واسطے جان کا

بیمہ کرانے کے لئے سالانہ قسط کی قیمتیں روپوں میں حسب ذیل ہیں -

ع	۲۱	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
ق	۲۵۶۲۰	۲۷۶۳۵	۳۱۵۲۰	۳۵۶۸۵	۴۰۶۰۰	۴۶۶۹۵	۵۰۶۳۵

۲۸، ۳۲، ۳۹ سال کی عمروں کے لئے سالانہ قسطوں کی مقداریں معلوم کرو



ع کو افقی محور پر ناچو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک سال، فضلوں کو ۲۰ سے ناچنا شروع کرو نیز ق کو انتصابی محور پر ناچو، پیمانہ ایک

چھوٹا حصہ = ایک روپیہ، معینوں کو ۲۵ سے ناپنا شروع کر دو  
ان امور کے موافق جدول کے نقاط کو ساتھ کی شکل میں مرسم کر کے  
ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا گیا ہے، طالب دیکھے کہ ان  
نقطوں میں سے ایک عمدہ منحنی بھی گذر سکتا ہے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ ۲۸ سال کی عمر کیئے سالانہ قسط تقریباً ۲۹۱۹ روپیہ ہے

۳۲ " " " " ۳۳

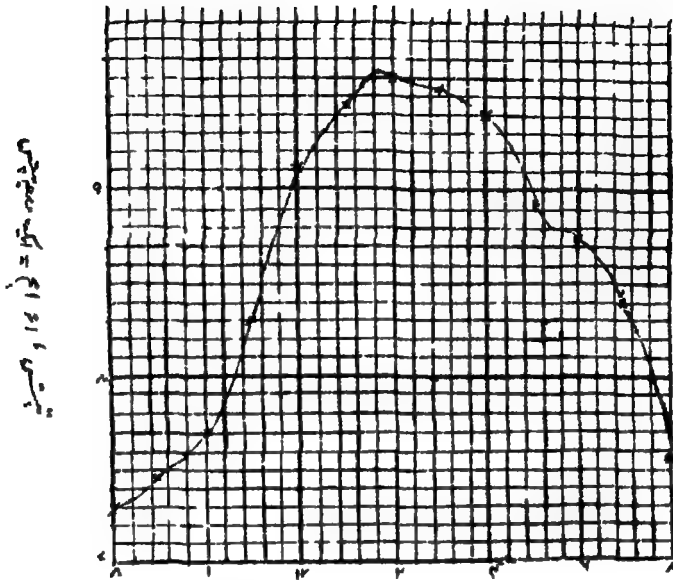
۳۰۔ مسلل ترسیمیں اور طبیعی سوالات میں انکا استعمال  
اب ہم چند ایسی مثالیں حل کریں گے جن میں نقاط مرسمہ  
کو صاف مسلل منحنی خطوط سے ملانے کی کوشش کی جائیگی  
ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ طبیعی عملوں میں خاص حدود کے  
اندر تبدیلی بتدریج واقع ہوتی ہے اس لئے اس صورت  
میں ترسیم کا صاف اور بے زاویہ ہونا زیادہ مناسب ہے  
دیکھو دفعہ ۲۷

مشق ۱۔ ذیل کے معطیات کی بنا پر ایک دن کے مختلف  
اوقات میں پیش کے تغیرات کی ایک ترسیم بناؤ۔ جدول میں  
پیش کو فارن ہیت پیمانہ کے مطابق بیان کیا گیا ہے

وقت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
پیش	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵

وقت کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ۱ = ۴ گھنٹہ فاصلوں کو ۸ سے ناپنا

شروع کرو۔



وقت 'بیانہ' = ۱ گھنٹہ

نیز تپش کو انتصابی محور پر ناپو، بیانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک درجہ تپش، سینوں کو ۰ سے ناپنا شروع کرو۔

ان بیانوں کے مطابق جدول بالا کے نقاط ساتھ کی شکل میں مرتبہ کئے گئے ہیں اور ان کو حتیٰ الوسع صاف منحنی سے ملایا گیا ہے اب ہم ادراج سے درمیان کے کسی خاص وقت پر درجہ تپش معلوم کر سکتے ہیں مثلاً  $10\frac{1}{4}$  بجے صبح تپش تقریباً  $9\frac{1}{4}$ ، درجہ تپش اور  $4\frac{1}{4}$  بجے تقریباً  $92$  درجہ۔

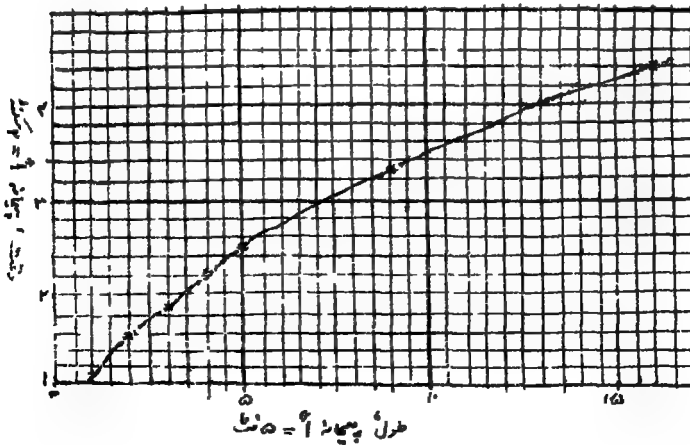
نیز شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ تپش ۱۱ اور ۱۲ بجے کے درمیان زیادہ سرعت سے بڑھتی رہی، ۵ اور ۶ بجے کے درمیان بہت

تھوڑی کم ہوئی، ۷ اور ۸ بجے کے درمیان بہت سرعت سے کم ہوئی زیادہ سے زیادہ پیش ایکس بجے کے کچھ بعد ہوئی۔ اگرچہ پیش بعض اوقات بہت سرعت سے بڑھتی رہی ہے اور بعض اوقات آہستہ سے تاہم یہ تبدیلی یک نخت واقع نہیں ہوئی بلکہ بتدریج ہوئی ہے، اس لئے نقطوں کو خطوط مستقیم سے ملانے کی بجائے مسلسل صاف منحنی سے ملانا زیادہ مناسب ہے۔

مشق ۲۔ تجربہ سے ایک رقص کا طول اور اسکی مدت اہتزاز کی قیمتیں حسب ذیل معلوم کی گئی ہیں، ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

طول فٹوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۹	۱۶
وقت سکندوں میں	۱۵۱	۱۶۶	۱۷۹	۱۹۲	۲۰۵	۲۶۳	۳۶۴

ترسیم سے معلوم کرو کہ ۷.۱۱ فٹ لمبے رقصوں کی مدت اہتزاز بالترتیب کیا ہوگی، اگر رقص کی مدت اہتزاز ۲ سکند ہو تو اس کا طول کیا ہوگا۔



طول کو افقی محور پر تالو، پیمانہ ۵ فٹ، وقت کو انتصابی محور پر  
 ا سے ناپنا شروع کرو، پیمانہ ۱ = ۳ سکند نقاط (۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱) (۱۱۱۱۱)  
 وغیرہ کو مرتسم کرو اور ان کو مسلسل منحنی کے ذریعہ ملاؤ۔  
 شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۷ فٹ لمبے رقاص کی مدت  
 اہتراز ۳ سکند ہے اور ۱۱ فٹ لمبے کی ۷ سکند  
 نیز جس رقاص کی مدت اہتراز ۲ سکند ہے اس کا طول ۲۲ فٹ  
 ہے۔

### امثلہ نمبری ۷

(۱) سکند ان کے پہلے آٹھ ہفتوں میں سے ایک ہفتہ میں ایک  
 تاجر نے جو نفع اٹھایا وہ جدول ذیل میں درج ہے۔

پانچواں ہفتہ ۱۱ - ۱۲ - ۲۰	پہلا ہفتہ ۵ - ۱۰ - ۲۵
چھٹا ۸ - ۹ - ۶۵	دوسرا ۳ - ۶ - ۲۰
ساتواں ۰ - ۱۲ - ۹۰	تیسرا ۴ - ۹ - ۲۵
اٹھواں ۰ - ۲ - ۱۰۵	چوتھا ۰ - ۸ - ۲۶

ان کو ترسیبی طریق پر تعبیر کرو۔

(۲) ایک سکول کی کرکٹ ٹیم کے کپتان نے ۱۲ بازیوں (مچوں)  
 میں حسب ذیل ڈوٹیں (رنز) بنائیں،

جنوری ۲۰	۷	فروری ۱۷	۱۵	مارچ ۱۷	۱۲
جنوری ۲۷	۱۰	فروری ۲۴	۲۱	مارچ ۲۴	۳
فروری ۳	۵	مارچ ۳	۰	اپریل ۳۰	۸
فروری ۱۰	۶	اپریل ۱۰	۲۵		





[نوٹ ریاست حیدر آباد کے متعلق جملہ اعداد و شمار تقریباً بتان  
آصفیہ سے لئے گئے ہیں]  
(۶) مالک محروسہ میں تعداد مساجد ۱۳۰۳ سے ۱۳۲۶ فصلی تک  
جدول ذیل میں دی گئی ہے:-

سال	۱۳۰۳	۱۳۰۴	۱۳۱۵	۱۳۱۸	۱۳۲۱	۱۳۲۵	۱۳۲۶
تعداد مساجد	۱۵۷۶	۱۵۸۶	۱۶۷۸	۱۸۰۴	۱۸۰۸	۱۸۵۵	۱۸۶۰

انہیں ترمیمی طریق پر تعمیر کرو۔  
(۷) ریاست حیدر آباد میں تعداد مدارس اور ٹپہ خانہ جات  
سرکار عالی من ابتداء ۱۳۱۷ فصلی تا ۱۳۲۷ فصلی جدول ذیل میں  
مندرج ہے:-

سال	۱۳۱۷	۱۳۱۸	۱۳۱۹	۱۳۲۰	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد مدارس سرکاری	۹۳۰	۹۶۰	۱۰۳۴	۱۰۳۶	۱۰۵۲	۱۰۶۶	۱۰۹۴	۱۱۶۹	۱۲۵۴	۱۵۶۹	۲۷۶۴
ٹپہ خانہ جات	۳۰۶	۳۴۲	۳۷۳	۳۸۶	۴۱۳	۴۴۷	۴۷۲	۵۳۰	۵۵۱	۵۸۲	۶۱۷

انکو ترمیمی طریق پر الگ الگ مرتم کرد اور معلوم کرو کہ  
(۱) سرکاری مدرسوں کی تعداد ۵ ہزار کب ہو جائے گی۔  
(۲) ٹپہ خانہ جات تعداد میں ایک ہزار کب ہو جائینگے۔  
(۸) ۳۱۔ امرداد ۱۳۲۴ فصلی سے ۳۱ امرداد ۱۳۲۹ فصلی تک انجنین  
اتحادی کی تعداد مع تعداد اراکین اور کل سرمایہ جدول ذیل  
میں مندرج ہے:-

سال	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷	۱۳۲۸	۱۳۲۹
انجمنیں	۲۵	۵۴	۲۹۵	۶۱۶	۹۸۹	۱۲۵۲
اراکین	۶۰۸	۱۷۶۷	۶۲۵۵	۱۵۱۹۳	۲۴۶۰۳۳	۳۰۹۱۲
سرمایہ	۱۶۸۵۶۸	۳۵۱۷۰۹۵	۱۱۷۶۵۷	۲۸۵۸۱۶۰	۴۸۶۳۵۴۲	۶۳۷۸۸۱۲

ان اعداد کو الگ الگ دستم کرو اور معلوم کرو کہ انجمنوں کی تعداد ۱۵۰۰ کب ہوگی اور کل سرمایہ ایک کروڑ کب ہو جائیگا۔  
(۹) برٹش انڈیا میں اخراجات افواج سرکار انگریزی پونڈوں میں  
چند گزشتہ سالوں میں حسب ذیل ہوئے:-

۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸ (سواڑہ)	۱۹۱۹ (سواڑہ)
۱۹۵۲۸	۱۹۷۷۹	۲۰۳۵۴	۲۱۸۹۹	۲۴۲۵۶	۲۷۶۵۷	۲۷۷۵۹

ان کو ترسیبی طریق پر ظاہر کرو۔  
(۱۰) برٹش انڈیا کی آمدنی کے محاصل پونڈوں میں ۱۹۱۳ء سے  
۱۹۱۸ء تک مختلف مدوں سے حسب ذیل ہیں:-

سال	۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸
زمین	۲۱۳۶۹۲	۲۱۲۵۷۲	۲۲۰۵۳۱	۲۲۰۶۴۱	۲۱۶۷۱۱	۲۲۷۱۹۹
آبکاری	۸۸۵۹۴	۸۸۵۵۷	۸۶۵۳۲	۹۲۱۱۶	۱۰۰۷۷۷	۱۰۶۱۴۷
کروڑ گیری	۷۵۵۵۸	۶۳۶۴۷	۵۸۶۷۴	۸۶۵۵۹	۱۱۲۵۰۴	۱۰۸۶۱۴
آب پاشی	۴۷۷۱۳	۴۶۶۸۱	۴۷۷۷۹	۵۱۷۵۶	۵۱۷۷۵	۵۳۷۲۰

ان کو ترسیبی طریق پر ظاہر کرو۔

(۱۱) ۱۸۶۶ء اور ۱۸۸۵ء کے درمیان جو لوگ آئرلینڈ کے ملک سے غیر مالک میں چلے گئے ان کی تعداد ہزاروں میں حسب ذیل ہے۔

سال	۱۸۶۶	۱۸۶۷	۱۸۶۸	۱۸۶۹	۱۸۷۰	۱۸۷۱	۱۸۷۲	۱۸۷۳	۱۸۷۴	۱۸۷۵	۱۸۷۶	۱۸۷۷	۱۸۷۸	۱۸۷۹	۱۸۸۰	۱۸۸۱	۱۸۸۲	۱۸۸۳	۱۸۸۴	۱۸۸۵
تعداد	۳۷۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵	۳۸۵۵

ان کو ترسیبی طریق پر تعبیر کرو۔

(۱۲) ہر چہار مردم شماری مالک محروسہ سرکار عالی میں مردوں اور عورتوں کی تعداد الگ الگ لاکھوں میں ۱۸۸۱ سے ۱۹۱۱ تک ذیل کے تحت میں دی گئی ہے

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
مرد	۵۰۵۰	۵۸۶۷	۵۶۶۷	۶۸۶۰
عورتیں	۴۸۶۴	۵۶۶۶	۵۴۶۷	۶۵۶۸

ان اعداد کو مرتب کر کے ترسیبیں کھینچو اور ذیل کے سوالات کے جواب لکھو

(۱) ۱۸۹۵ء میں مردوں کی تعداد کیا تھی ؟

(۲) ۱۹۰۷ء میں عورتوں کی تعداد کیا تھی ؟

(۳) کونسا نخی مقابلہ زیادہ اضافہ ظاہر کرتا ہے ؟

(۴) اگر اضافہ کی شرح یکساں فرض کی جائے تو مردوں کی تعداد ۹۰ لاکھ کب

ہو جائے گی اور اس سال عورتوں کی تعداد کیا ہوگی۔

(۱۳) بستان آصفیہ میں تختہ ہر چہار مردم شماری متعلقہ عیسائیاں مالک

محروسہ سرکار عالی حسب ذیل ہے

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
یورپین	۴۰۱۶	۵۲۶۱	۴۳۴۷	۵۳۸۴
یوریشین	۱۹۵۶	۲۵۰۷	۳۲۹۲	۳۰۰۴
دیسسی عیسائی	۷۹۴۲	۱۲۶۶	۱۵۳۵۷	۴۵۹۰۸

ان اعداد کی ترسیں بناؤ اور ہر سہ مخیات کی شرح اصناف پر بالتفصیل بحث کرو۔

(۱۴) انگلستان اور ویلز، سکاٹلینڈ، آئرلینڈ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۳۱ سے ۱۹۱۱ تک جدول ذیل میں درج ہیں۔

سال	۱۸۵۱	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
انگلستان اور ویلز	۱۷۹۵۲۸	۲۰۰۵۶۶	۲۲۷۵۱۲	۲۵۹۵۷۴	۲۸۰۵۶۲	۳۰۵۷۲۶	۳۲۷۰۵۷
سکاٹلینڈ	۲۸۵۸۹	۳۰۵۶۲	۳۳۳۵۶	۳۷۳۳۶	۴۰۵۲۶	۴۳۵۷۲	۴۷۱۶۱
آئرلینڈ	۶۵۵۵۲	۵۷۷۷۹	۵۴۷۱۲	۵۱۷۷۵	۴۷۷۰۵	۴۴۷۵۹	۴۳۷۹۰

ان نتائج کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ

(۱) ان ممالک کی آبادیاں ۱۸۵۷، ۱۸۸۹، اور ۱۹۰۷ میں کیا تھیں۔

(۲) سکاٹلینڈ اور آئرلینڈ کی آبادیاں کب مساوی ہونگی۔

(۳) اگر آبادی کی کمی یا بیشی کی شرح مستقل ہو تو معلوم کرو کہ انگلستان کی آبادی ۴۰۰ لاکھ کب ہو جائے گی نیز سکاٹلینڈ کی آبادی آئرلینڈ کی آبادی سے ڈیوڑھی اور دوچند کب ہوگی۔

(۱۵) ایک دوکاندار کسی چیز کے مختلف ناپوں کے لئے قیمت کی ایک فہرست بنانا چاہتا ہے، اس نے اس چیز کے ۶ ناپ تیار کرانے سے ان کی لاگتیں حسب ذیل معلوم کیں

لبائی پون میں	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۱	۳۵	۴۰
قیمت	۱۸	۲۲	۲۸-۸	۳۱-۱۲	۳۴-۲	۳۶-۴	۳۸

اس کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کرو کہ ۱۲، ۲۱، ۳۰، ۴۵ پنچ لمبی اشیاء کی تقریبی قیمتیں کیا ہوں گی، اور ۳۲ روپے کو جو چیز آئینگی اس کی لمبائی کیا ہوگی۔

(۱۶) ایک فہرست میں ایلومینیم کی دیگچیوں کے ناپ اور ان کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں :-

ناپ	۲ پائٹ	۳ پائٹ	۴ پائٹ	۶ پائٹ	۸ پائٹ
قیمت	۴ روپیہ ۵ ار	۶ روپیہ ۵ ار	۸ روپیہ ۴ ار	۱۰ روپیہ ۵ ار	۱۴ روپیہ ۱۲ ار

ترسیم بنا کر دیکھو کہ ۵، ۷، ۹ پائٹ کی دیگچیوں کی قیمتیں کیا ہوں گی اور ۵ روپے، ۷ روپے ۱۲، اور ۱۴ روپے کو کتنے پائٹ کی دیگچیاں آئیں گی۔

(۱۷) قیمتوں کی ایک فہرست میں دستی بیگوں کے ناپ اور ان کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں -

ناپ	۱۲	۱۸	۲۰	۲۴	۲۷	۳۰
قیمت	۲۹ روپیہ ۸	۳۵ روپیہ ۸	۴۹ روپیہ ۸	۵۵ روپیہ ۸	۵۹ روپیہ ۱۲	۶۳ روپیہ ۸

ترسیم بنانے سے معلوم کرو کہ ۱۵، ۱۷، ۲۲، ۲۶ پنچ کے بیگ کی قیمت کیا ہوگی اور ۳۰ روپے ۱۲ آنہ اور ۵۰ روپے میں کتنی لمبائی کے بیگ آئیں گے۔

(۱۸) اسی قوت ق والے ایک انجن میں ایندھن کا ہفتہ وار صرفہ ص ذیل کی فہرست میں مندرج ہے۔

ق	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰	۶۰	۸۰
ص	۳ روپیہ ۲	۶ روپیہ ۱۲	۱۳	۲۵	۳۲	۴۸

بتاؤ کہ ۴۵، ۶۰، ۹۰ اسی قوت والے انجنوں کا صرفہ تقریباً کیا ہوگا۔

(۱۹) ۱۰۰ پونڈ کی مکیشٹ رقم کے لئے جان کا بیمہ کرانے کے واسطے مختلف عمروں میں حسب ذیل چندہ دینا پڑتا ہے۔

عمر	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
پونڈ	۲۵۱	۲۵۳۵	۲۵۸	۳۵۳	۴۵۲۵	۵۵۶	۶۵۷

ان کو ترمیمی طریق پر تعبیر کرو اور ۲۷، ۳۸، ۵۲ سال کی عمروں کے لئے چندہ کی مقدار معلوم کرو۔

(۲۰) ۷ برس کی عمر کے ایک مرد کی جتنے سال اور زندہ رہنے کی امید کی جاسکتی ہے وہ دئی کرالماک میں حسب ذیل دی گئی ہے۔

ع	۰	۲	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۳	۲۸	۳۲	۳۶
امید حیات	۴۱۳۵	۵۱۶۰	۶۹۱۰	۹۵۹۶	۱۲۵۸	۱۶۹۴	۲۱۴۱	۲۶۵۲	۳۰۷۱	۳۷۹۶

بتاؤ کہ ۷، ۱۳، ۲۱، ۳۵ سال کے مردوں کے لئے امید حیات کتنے سال ہو سکتی ہے۔

(۲۱) لاما کی متناظر قیمتیں ذیل کی جدول میں درج ہیں، ان کے

باہمی تعلق کو ظاہر کرنے والا مستثنیٰ بناؤ۔

لا	۰	۱	۱۵۵	۲	۲۵۵	۳	۳۵۵	۴	۴۵۵	۰
ما	۰	۱	۲۵۲۵	۴	۶۵۲۵	۹	۱۲۵۲۵	۱۶	۲۰۵۵۵	۰

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ۲۵۲ کے متناظر ما کی کیا قیمت ہوگی۔

(۲۲) ایک تجربہ کی بنا پر دو مقادیر لا، ما کی جو قیمتیں معلوم کی گئی ہیں وہ جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

لا	۱	۲	۲۵۵	۳	۳۵۵	۴	۵	۶
ما	۱	۵۵	۱۴۳	۲۳۳	۳۲۹	۴۲۵	۵۲	۵۱۷

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ۱۸ کے جواب میں ما کی کیا قیمت ہوگی اور ما کی قیمت ۱۶ کے جواب میں لا کی کیا قیمت ہوگی۔

(۲۳) ایک جسم جاذبہ ارض کے زیرِ عمل کسی خاص مقام سے گرنا شروع کرتا ہے، اس کا فاصلہ طے کردہ ف اور متناظر وقت ت کی قیمتیں جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

ت - سکینڈ	۵	۱	۱۵۵	۲	۲۵۵	۳	۳۵۵	۴	۴۵۵
ف - فٹ	۴	۱۶	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴	۱۹۶	۲۵۶	۳۲۴

ف اور ت کا تعلق ترسیعی طریق پر ظاہر کرو اور د، ا، ایک ایسے

پہاڑ کی بلندی معلوم کرو کہ جس کی چوٹی سے اگر ایک پتھر پھینکا جائے تو وہ ۳۵۲ سکند میں سطح زمین پر آکر گرے ایک ایسے گڑھے کی گہرائی معلوم کرو جس کی تہ تک پہنچنے کے لئے ایک پتھر کو ۳۵۲ سکند لگیں۔

(۳۴) ذیل کی جدول کی بنا پر بار پیمائے کے ارتفاع کے تغیرات کو ظاہر کرنے کے لئے مسلسل اور صاف متغنی کھینچو۔

وقت	۲ بجے صبح	۶ بجے صبح	۸ بجے صبح	۱۲ بجے دوپہر	۳ بجے شام	۶ بجے شام	۹ بجے شام	۱۲ بجے رات
ارتفاع	۲۹۵۷۵	۲۹۵۸	۳۰	۲۹۱۹۵	۲۹۱۹۰	۲۹۱۹۳	۲۹۱۹۷	۲۹۱۹۳

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۹ بجے صبح ایک بجے دوپہر اور پانچ بجے شام کو پانی کا ارتفاع تقریباً کیا ہوگا۔

(۳۵) ایک اسطوانہ کے اندر پانی ڈالا گیا ہے اس کی تپش کو بالترتیب بدلتے ہوئے درجہ تپش کے متناظر پانی کا حجم دریافت کیا گیا ہے۔ حجم اور تپش کی یہ متناظر قیمتیں ذیل کی جدول سے ظاہر ہیں۔ ان کو ترسیم کر کے بتاؤ کہ پانی کا حجم تقریباً ۴۰ سنتی گریڈ پر کم سے کم ہے۔

تپش سنتی گریڈ پر	۱	۲	۳	۵	۸.۵	۱۰	۱۲	۱۳
حجم کھینچوں میں	۱۰	۷	۵۶۷	۵۵۲	۹	۱۲	۱۶	۱۸

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۴۰ سنتی گریڈ پر حجم کیا ہوگا اور جب حجم ۲۰ کمب اینچ ہوگا تو تپش کیا ہوگی؟

(۳۶) ایک گلاس کو ۱۵ سنتی گریڈ تپش والے پانی سے بھر کر



بتدریج گرم کیا گیا ہے اور ت سکندوں کے بعد اس کی تپش  
ش کی قیمتیں جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

ت	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵
ش	۱۵	۲۰.۵	۲۳.۵	۲۸.۵	۳۲	۳۵.۵	۳۸.۵	۴۱.۵

وقت اور تپش کا منحنی کھینچو۔

(۲۷) ایک تجربہ سے کسی گیس پر کے دباؤ اور اس کے متناظر حجم کی  
قیمتیں جبکہ تپش مستقل رہے ذیل کی جدول دی گئی ہیں۔

دباؤ پونڈوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعبش میں	۴	۲	۱.۳۳	۱	۰.۸	۰.۶۶

اسکو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو اور ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ جب دباؤ بالترتیب  
۲½ پونڈ، ۴ پونڈ ہوگا تو حجم کیا ہوگا اور کس دباؤ پر حجم  
۱.۵ ہوگا۔



مساوات درجہ دوم



# باب چہارم

## مساوات درجہ دوم

۳۱۔ دفعہ ۱۱ میں ہم نے دیکھا کہ مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت مساوات کے درجہ کا تعین کرتی ہے کمینز کسی ایک مساوات میں مجہول مقداروں کی تعداد ایک، دو، تین یا زیادہ ہو سکتی ہے مثلاً  $۲ + ۳ = ۰$  ایک مجہول (مقدار) کی مساوات درجہ اول ہے،  $۲ + ۳ + ۴ = ۰$  دو مجہولوں کی مساوات درجہ اول ہے، اسی طرح سے  $۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۰$  ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم ہے وغیرہ وغیرہ دیکھو نقشہ ذیل، اس میں ہر عددی مساوات کے ساتھ اس کی عام سے عام صورت بھی لکھ دی گئی ہے۔

```

graph TD
    MS[مساوات] --> D1[درجہ اول]
    MS --> D2[درجہ دوم]
    
    D1 --> D1_1[ایک متغیر کی]
    D1 --> D1_2[دو متغیروں کی]
    
    D2 --> D2_1[ایک متغیر کی]
    D2 --> D2_2[دو متغیروں کی]
    
    D1_1 --> D1_1_1[" $x + 2 = 5$ "]
    D1_1 --> D1_1_2[" $3x + 1 = 10$ "]
    D1_1 --> D1_1_3[" $5x - 2 = 8$ "]
    
    D1_2 --> D1_2_1[" $x + y = 10$ "]
    D1_2 --> D1_2_2[" $2x + 3y = 15$ "]
    D1_2 --> D1_2_3[" $4x + 5y = 20$ "]
    
    D2_1 --> D2_1_1[" $x^2 + 3x + 2 = 0$ "]
    D2_1 --> D2_1_2[" $x^2 - 5x + 6 = 0$ "]
    D2_1 --> D2_1_3[" $x^2 + 7x + 12 = 0$ "]
    
    D2_2 --> D2_2_1[" $x^2 + y^2 = 10$ "]
    D2_2 --> D2_2_2[" $x^2 - y^2 = 5$ "]
    D2_2 --> D2_2_3[" $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ "]
  
```

نیز ہم جانتے ہیں کہ کسی مساوات کے حل یا اصل سے کیا مراد ہے، معلوم مقدار: نہ کی رقوم میں مجہول مقدار کی وہ قیمت جو مساوات کو پورا کرے مساوات کا حل یا اصل کہلاتی ہے، تفصیل کے لئے دیکھو دفعہ ۱۲

## ۳۲۔ مساوات درجہ دوم

جس مساوات میں مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت دو ہو اسے مساوات درجہ دوم کہتے ہیں مثلاً

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 + 5 - 13 = 0$$

$$12 = x^2 - 6$$

$$(3 - x)^2 = 5(1 + x)$$

$$3(2 + x)(4 - x) = 23 \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

اوپر کی ہر ایک مساوات میں صرف ایک مجہول مقدار شامل ہوتی ہے اور اس کی بڑی سے بڑی قوت دو ہے، دراصل اس کا پورا نام ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم ہونا چاہیے لیکن اختصاراً اسے مساوات درجہ دوم کہتے ہیں۔

طالب علم جانتا ہے کہ  $x^2 + b + c = 0$  میں معلوم مقادیر  $a, b, c$  کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے اوپر کی ہر ایک مساوات اور نیز درجہ دوم کی کوئی عددی مساوات حاصل ہو سکتی ہے پس مساوات درجہ دوم کی عام سے عام صورت

$$1) لا^2 + ب لا + ج = 0$$

۳۳۔ ذیل کا مسئلہ ضروری ہے۔

اگر کوئی حاصل ضرب صفر ہو تو اس حاصل ضرب کا ایک جزو ضربی لازماً صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ حاصل ضرب  $لا = 0$ ، تب اگر با صفر کے مساوی نہ ہو تو تقسیم کی تعریف کے مطابق

$$لا = 0 = \text{یعنی ایک جزو ضربی } لا = 0$$

اسی طرح فرض کرو کہ حاصل ضرب  $لاما = 0$ ، تو اگر لا اور ما میں سے کوئی بھی صفر کے مساوی نہ ہو تو  $ی = 0$  پس ایک جزو ضربی ہی صفر کے مساوی ہے۔

اسی طرح یہ مسئلہ اجزائے ضربی کی کسی تعداد کے لئے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ۔ اگر  $لا (لا + ۳) = 0$  تو ظاہر ہے کہ یا تو  $لا = 0$  یا  $لا + ۳ = 0$  پس جملہ  $لا (لا + ۳)$  کے صفر کے مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ  $لا = 0$  یا  $لا + ۳ = 0$ ۔

اسی طرح ہم مساوات  $لا^2 = ۴$  کو حل کر سکتے ہیں

طریقہ سے منفی کرنے سے

$$لا^2 - ۴ = 0 \text{ یعنی } (لا + ۲)(لا - ۲) = 0$$

پس یا تو  $لا + ۲ = 0$  جس سے  $لا = -۲$

یا  $لا - ۲ = 0$  "  $لا = ۲$

۳۴۔ مساوات درجہ دوم کا حل اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے  
مساوات درجہ دوم میں مجہول مقدار کی قوت دو سے زیادہ نہیں  
ہونی چاہئے لیکن دو سے کم سب قوتیں اس مساوات میں واقع ہو سکتی ہیں  
مثلاً مساوات  $۲ + ۱۲ - ۱۵ = ۰$  میں لا کی دوسری قوت کے علاوہ  
لا کی پہلی قوت اور صفر قوت بھی واقع ہوتی ہے، ایسی مساوات  
درجہ دوم کو محلول مساوات کہتے ہیں۔ لیکن جس مساوات میں  
مجہول مقدار کا صرف مرتبہ شامل ہو اور پہلی قوت شریک نہ ہو اسے  
خالص مساوات درجہ دوم کہتے ہیں جیسے  $۲ - ۹ = ۰$  اور  
 $۲ - ۹ = ۰$

درجہ دوم کی خاص مساواتیں اجزائے ضربی میں تحلیل ہونے سے  
آسانی حل ہو سکتی ہیں۔

مساوات  $۲ - ۹ = ۰$  کو حل کرو۔

طرفین مساوات کو ۹ پر تقسیم کرنے سے  $۲ - ۹ = ۰$

طرفین سے ۹ تفریق کرنے سے  $۲ - ۹ = ۰$

یعنی  $(۲ - ۹) (۳ + ۳) = ۰$

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ اس کا

کوئی ایک جزو ضربی صفر ہو پس  $۲ - ۹ = ۰$  جس سے  $۲ = ۹$

یا  $۲ + ۳ = ۰$  جس سے  $۲ = -۳$

پس مساوات  $۲ - ۹ = ۰$  کے دو حل  $۲ + ۳$  اور  $۲ - ۳$  ہیں

تصدیق۔ جب  $۲ = ۹$  تو  $۲ + ۳ = ۹ + ۳ = ۱۲$

پس لا کی قیمت ۳ کے لئے طرفین مساوات برابر ہو جاتے ہیں۔



۱۔ سلیئے ۳ مساوات کا حل ہے اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ۳ بھی مساوات کا حل ہے۔

$$\text{مساوات ۳} (۱+۱) - ۵ = ۲ (۱+۱) \text{ کو حل کرو۔}$$

$$۳ (۱+۱) - ۵ = ۲ (۱+۱)$$

$$۱۶ = ۲$$

طرفین سے ۱۶ تفریق کرنے سے

$$(۱۶-۱۶) = (۲-۲) \text{ یعنی } ۰ = ۰$$

جس سے  $۱۶ = ۲$  یا  $۲ = ۱۶$

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ۳ اور ۳ مساوات کے حل ہیں۔

مساوات کی شکل  $۱۶ = ۲$  سے ظاہر ہے کہ ۱۶ ایک ایسی مقدار

ہے جس کا مربع ۱۶ ہے، سلیئے لا کو ۳ یا ۳ کے مساوی ہونا چاہئے

۳۵۔ درجہ دوم کی مخلوط مساواتوں کو جب معیار ہی صورت

میں لایا جائے تو مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم

ہوگا اور بائیں طرف صفر، جب یہ دائیں طرف کا رکن دوا جزائے

ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو مساوات باسانی حل ہو سکتی ہے۔

درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں اور ان میں

سے چند ذیل کی مثالوں میں دئے جائینگے مگر کوئی اور طریقہ

استعمال کرنے سے پہلے طالب علم کو چاہئے کہ مساوات کو معیاری

صورت میں لانے کے بعد دائیں طرف کے جملہ درجہ دوم کو

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرے، اگر وہ اس میں

کامیاب ہو گیا تو وہ مساوات کو حل کر سکے گا۔



$$اور بائیں جانب: ۶۰ - ۳۰ - ۵ = ۲۵$$

اس لئے ۵ مساوات کی ایک اصل ہے۔

$$اسی طرح اگر ۳ + ۲ = ۵ تو مساوات کا دایاں رکن = ۳ × ۲ (۳) = ۶$$

$$اور بائیں رکن = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰$$

اس لئے ۳ مساوات کی ایک اصل ہے

$$(۳) مساوات ۱ لا ۲ - ۱۵ = ۰ پر غور کرو$$

اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں (۲ لا ۳) (۳ لا ۵) = ۰

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$ایک جزو ضربی صفر ہو پس اگر ۲ لا ۳ = ۰ تو لا = ۰$$

اور مساوات میں اس کو مندرج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات

$$پوری ہوتی ہے کیونکہ ۴ - (۳ - ۲) - (۳ - ۲) = ۱۵ - ۳ + ۳ = ۱۵$$

$$۱۵ - ۳ + ۲ = ۱۵$$

$$۰ = ۱۵ - ۱۵ =$$

اگر ۳ لا ۵ = ۰ تو لا = ۰ جس سے مساوات پوری ہوتی ہے

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں ۳ اور ۵ ہیں

$$(۴) ۹ لا ۲ = ۱۴ + ۲$$

$$مساوات مفروضہ سے ۹ لا ۲ - ۱۴ = ۰$$

$$یعنی (۳ لا ۴) = ۰$$

اس مساوات کے دائیں جانب جزو ضربی ۳ لا ۴ دو دفعہ

واقع ہوتا ہے اور اس مساوات درجہ دوم سے ہمیں لا کی صرف

ایک قیمت معلوم ہوتی ہے '۳' جو مساوات کو پورا کرتی ہے،

ایسی صورت میں ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات کی دو اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

۳۶۔ مساوات کو حل کرنے سے پیشتر یہ ضروری ہے کہ اسے معیاری صورت میں لایا جائے اور اگر اس میں خطوط وحدانی یا کسریں واقع ہوں تو مساوات کو ان سے صاف کر لیا جائے۔

$$(۱) \quad ۳ - ۲ = ۳ - ۲ \quad \text{لا کو حل کرو۔}$$

طرفین کو ۵ سے ضرب دینے اور تمام رقموں کو دائیں جانب لانے سے

$$۲۰ - ۱۵ = ۱۳ - ۱۰$$

جملہ رقم کی علامات بدلنے سے [یعنی طرفین کو -۱ کے ساتھ ضرب دینے سے

$$۱۵ - ۲۰ = ۱۳ - ۱۰$$

$$\text{یعنی } (۵ - ۳) (۳ + ۲) = ۰$$

جس سے  $۵ = ۳$  یا  $۳ = ۲$  جو مساوات کی اصلیں ہیں طالب علم اس کی تعمید یثی کرے۔

$$(۲) \quad \text{مساوات } \frac{۱}{۱+۲} + \frac{۲}{۲+۳} - \frac{۳}{۳+۴} = ۰ \quad \text{کو حل کرو۔}$$

نسب نماؤں کے دواضعات اقل (۱+۲) (۲+۳) (۳+۴) سے

ضرب دینے سے

$$۰ = (۲+۳)(۱+۲) - (۳+۴)(۱+۲) + (۴+۵)(۲+۳)$$

$$\text{یعنی } ۰ = ۵ + ۲ + ۳ + ۴ - (۳ + ۴ + ۵ + ۶) - (۴ + ۵ + ۶ + ۷) + (۵ + ۶ + ۷ + ۸)$$

$$\text{یعنی } ۳ - ۵ + ۵ = ۰$$

$$\text{اس لئے } ۵ = ۳$$

## ۸۔ مثلہ نمبری

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں لکھو

$$\begin{aligned} ۱ - (۱-لا) (۲-لا) &= ۲ - (۱-لا) (۲+لا) \\ ۳ - لا (۳+لا) &= ۴ - (۲+لا) (۲+لا) \\ ۵ - (لا+۱) (لا-۱) &= ۶ - (لا-۲) (لا+۲) \\ ۷ - (لا-۱) (لا+۱) &= ۸ - (لا-۱) (لا+۱) \end{aligned}$$

$$۹ - (۳-لا)^۲ = ۱۰ - \{ (۲+لا) (۲+لا) \} \{ (۳-لا) (۳-لا) \}$$

$$۱۱ - لا^۲ = ۱۲ - لا (۲+لا) - ۵ (لا+۲)$$

بتاؤ کہ لا کی کن قیمتوں کے لئے ذیل کے جملے صفر کے مساوی ہیں

$$۱۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$۱۵ - لا^۲ + لا + ۱۱$$

$$۱۷ - لا^۲ - لا - ۶$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو اور ہر صورت میں اپنے جواب کی تصدیق کرو

$$۱۹ - لا^۲ + لا + ۱۰ = ۰$$

$$۲۱ - لا^۲ + لا - ۶ = ۰$$

$$۲۳ - لا^۲ - لا - ۲ = ۰$$

$$۲۵ - لا^۲ + لا + ۱۱ = ۰$$

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں معلوم کرو

$$۲۷ - لا^۲ = ۲۸ - لا - ۱$$

$$۳۰ - لا = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}$$

$$۲۹ - لا = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$$

$$۳۲ - لا = \frac{۱}{۳+۱} - \frac{۱}{۱-۳}$$

$$۳۱ - لا = \frac{۱۵}{۳-۱۵} - \frac{۱}{۱+۱}$$

$$۳۴ - لا = \frac{۳}{۱+۱۲} + \frac{۱+۱۲}{۳}$$

$$۳۳ - لا = \frac{۸-۱۲}{۵+۱۲}$$

$$۳۶ - لا = \frac{۶}{۲+۱۲} + (۲-۱۲)$$

$$۳۵ - لا = \frac{۱۰}{۳} - \frac{۱۰+۱۲}{۵-۱۲}$$

$$۳۸ - لا = \frac{۲۴}{۹-۱۲} + \frac{۶}{۳+۱۲}$$

$$۳۷ - لا = \frac{۱۲}{۵-۱۲} - \frac{۱-۱۲}{۳}$$

۳۷ - مساوات لا + ۱۲ = ۰ پر غور کرو

اس میں لا کا سر ایک ہے اور لا کا سر ۱۲ ہے، اگر طرفین پر لا یعنی لا کے نصف سر کا مربع زیادہ کر دیا جائے تو

$$لا + ۱۲ = لا + لا + لا$$

$$لا = (لا + ۱۲)$$

یعنی ہم دیکھتے ہیں کہ طرفین مساوات پر لا زیادہ کرنے سے دائیں جانب کا رکن مربع کامل بن جاتا ہے۔

مساوات لا - ۸ = ۰ کو نو طرفین پر لا کے نصف سر کا مربع (-۴) زیادہ کرنے سے

$$لا - ۸ = (-۴) + لا$$

$$لا = (-۴)$$

دائیں طرف کا رکن مربع کامل بن جاتا ہے۔

طالب علم دیکھے کہ اس مساوات میں بھی لا کا سر ایک تھا۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ

جملہ لا + ۲۱ جہاں ہے (لا + ۲۱) طرفین پر ۲ یعنی ۹ زیادہ کرنے سے (۱)

اور لا - ۱۰ جہاں ہے (لا - ۱۰) ۵ یعنی ۲۵ سے (۲)

لا - ۲ جہاں ہے (لا - ۲) ۱ جہاں ہے (۳).....

پس بالعموم لا ± ۲ ن کی شکل کا کوئی جملہ جس میں لا کا سر  
ایک ہو مربع کامل بن جاتا ہے اگر لا کے نصف سر کے مربع  
کو طرفین پر زیادہ کر دیا جائے۔

اب ہم اس امر کو درجہ دوم کی مساواتوں کے حل کرنے میں  
استعمال کرتے ہیں۔

مثال ۱ - مساوات لا² = ۳۲ - ۱۴ لا کو حل کرو

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے لا² + ۱۴ لا = ۳۲  
اس میں لا² کا سر ایک ہے، پس لا کے نصف سر کے مربع  
کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$لا² + ۱۴ لا + ۴۹ = ۳۲ + ۴۹$$

$$یعنی لا² + ۱۴ لا + ۴۹ = ۸۱$$

$$یعنی (۷ + لا)² = ۸۱$$

طرفین کا جذر لیتے سے (لا + ۷) = ± ۹ ..... (۱)

اگر مثبت علامت لی جائے تو لا + ۷ = ۹ یعنی لا = ۲

اگر منفی علامت لی جائے تو  $4 + 9 = 13$  یعنی  $13 - 4 = 9$   
نوٹ بادی النظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) ہونی چاہیے  
$$4 \pm = (4 + 9) \pm$$

کیونکہ  $\pm (4 + 9)$  جذر ہے  $(4 + 9)^2$  کا اور  $4 \pm$  جذر ہے ۸۱ کا  
لیکن یہ غیر ضروری ہے جیسا کہ ہم چاروں صورتوں کو الگ الگ لیکر دیکھ سکتے ہیں  
دونوں طرف مثبت علامت لینے سے  $4 + 9 = 13$  یعنی  $13 - 4 = 9$  ایک ہی جواب  
منفی " "  $4 - 9 = -5$  یعنی  $13 - 4 = 9$  ایک ہی جواب

دائیں طرف مثبت اور بائیں طرف منفی علامت لینے سے

$$4 + 9 = 13 \text{ یعنی } 13 - 4 = 9$$

دائیں طرف منفی اور بائیں طرف مثبت علامت لینے سے

$$4 - 9 = -5 \text{ یعنی } 13 - 4 = 9$$

دونوں صورتوں میں جواب ایک ہی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ دوہری علامت  $(\pm)$  صرف ایک طرف لگانا کافی ہے  
اور بالعموم اسے عددی جذر کے ساتھ لگاتے ہیں۔

$$\text{مثال ۲۔ } 1512 + (59)^2 = 1512$$

لا کے نصف سر کے مربع  $(59)^2$  کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$1512 + (59)^2 = 1512 + (59)^2$$

$$1512 + 3481 =$$

$$4993 = (59 + 1512)$$

حسابی طریق سے ۴۹۹۳ کا جذر ۷۰.۶۵ معلوم ہوتا ہے

$$\text{پس } 70.65 \pm = 1512$$



اس لئے  $لا = ۷$  یا  $-۷$   
 یاد رہے کہ تکمیل مربع کے عمل سے پہلے  $لا$  کے سر کو ایک بنا لیتا ہے  
 مثال ۳۔  $۲ لا^۲ + ۷ لا - ۴ = ۰$   
 مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ ایسی تمام رقمیں جن میں لاشکل  
 ہوتا ہے سب کی سب دائیں جانب آجائیں۔

$$۲ لا^۲ + ۷ لا = ۴$$

طرفین کو ۲ پر تقسیم کرنے سے  $لا$  کے سر کو ایک بناؤ

$$لا^۲ + \frac{۷}{۲} لا = ۲$$

تکمیل مربع کے لئے  $لا$  کے نصف سر کے مربع  $(\frac{۷}{۴})^۲$  کو  
 طرفین پر زیادہ کرو تو

$$لا^۲ + \frac{۷}{۲} لا + \frac{۴۹}{۱۶} = ۲ + \frac{۴۹}{۱۶} = ۲(\frac{۷}{۴}) + ۲ = ۲(\frac{۷}{۴}) + \frac{۱۶}{۱۶}$$

$$پس \quad \frac{لا^۲}{۱۶} = ۲(\frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۴})$$

جذر لینے سے

$$\frac{لا}{۴} \pm = \frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

مثبت علامت لینے سے

$$\frac{لا}{۴} = \frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۲$$

منفی علامت لینے سے

$$لا = -۲$$

پس مساوات مفروضہ  $۲ لا^۲ + ۷ لا - ۴ = ۰$  کی دو حل ہیں

$\frac{۱}{۴}$  اور  $-۲$  ہیں۔

مثال ۴۔ مساوات  $۶ لا^۲ - ۷ لا + ۲ = ۰$  کو حل کرو۔

لا والی رقموں کو ایک طرف لانے سے

$$۶ - لا^۲ = لا = ۲$$

طرفین کو لا کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$لا - \frac{۱}{۴} = لا = \frac{۱}{۳}$$

اگر طرفین پر لا کے نصف سر کا مربع  $(\frac{۱}{۱۲})$  زیادہ کر دیا جائے تو

$$لا^۲ - \frac{۱}{۴} لا + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۴}{۱۲}$$

$$\frac{۴۹}{۱۴۴} = (لا - \frac{۱}{۱۲})^۲$$

$$\therefore لا - \frac{۱}{۱۲} = \pm \frac{۷}{۱۲}$$

اس لئے یا لا -  $\frac{۱}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$  جس سے لا =  $\frac{۸}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲}$

$$یا لا - \frac{۱}{۱۲} = -\frac{۷}{۱۲} \Rightarrow لا = -\frac{۶}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} = -\frac{۵}{۱۲}$$

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں  $\frac{۹}{۱۲}$  اور  $-\frac{۵}{۱۲}$  ہیں۔

۳۸۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم کی عام سے عام شکل  $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$  ہے۔

اس مساوات میں لا، ب، ج کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے ہم درجہ دوم کی ہر عددی مساوات حاصل کر سکتے ہیں، اس لئے

اگر ہم اس مساوات کو حل کر سکیں، یعنی لا کی ایسی قیمت معلوم مقادیر

لا، ب، ج کی رقوم میں معلوم کر سکیں جو مساوات میں مندرجہ

کرنے سے طرفین مساوات کو برابر کر دے تو ایسا خیال کرنا چاہیے کہ

ہم نے ہر عددی مساوات درجہ دوم کو حل کر لیا کیونکہ لا + ب لا

+ ج = ۰ کے حلوں یا اصلوں میں لا، ب، ج کی بجائے مفروضہ مساوات

کے عددی سر رکھنے سے اس کی اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں۔  
پس ہم  $لا + ب + لا + ج = ۰$  کی اصلیں معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں، ہم دیکھیں گے کہ پہلے کی ہر ایک مساوات درجہ دوم کی طرح اس کی بھی دو اور صرف دو اصلیں ہیں۔

لا والی رقوموں کو ایک طرف لانے سے

$$لا + ب + لا = -ج$$

لا کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$لا + \frac{ب}{لا} = -\frac{ج}{لا}$$

لا کے نصف سر کے مربع  $\left(\frac{ب}{لا}\right)^2$  کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$لا + \frac{ب}{لا} + \left(\frac{ب}{لا}\right)^2 = -\frac{ج}{لا} + \left(\frac{ب}{لا}\right)^2$$

$$\frac{لا^2 + ب - ج - \frac{ب^2}{لا}}{لا^2} =$$

$$\frac{لا^2 + ب - ج - \frac{ب^2}{لا}}{لا^2} = \left(\frac{ب}{لا} + لا\right)^2$$

$$\therefore لا = \frac{ب - \sqrt{لا^2 - ۲ب - ج}}{لا^2} \dots\dots (۱)$$

پس مساوات کی دو اصلیں  $\frac{ب + \sqrt{لا^2 - ۲ب - ج}}{لا^2}$  -  $\frac{ب - \sqrt{لا^2 - ۲ب - ج}}{لا^2}$

ہیں۔

ضابطہ (۱) ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں استعمال

ہو سکتا ہے۔

مثال ۱:  $۵\lambda^2 - ۸\lambda + ۲۱ = ۰$  کو حل کرو۔

مساوات کو معیاری صورت  $\lambda^2 + ۲\lambda + ۵ = ۰$  میں لانے سے

$$۵\lambda^2 - ۸\lambda - ۲۱ = ۰$$

یہاں  $۵ = ۱$ ،  $۸ = ۲$ ،  $۲۱ = ۵$  ج

$$\lambda = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲^2 - ۴ \times ۵ \times ۲۱}}{2 \times ۵}$$

$$= \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ - ۴۲۰}}{۱۰} = \frac{-۲ \pm \sqrt{-۴۱۶}}{۱۰}$$

$$= \frac{-۲ \pm ۱۶i}{۱۰}$$

ظاہر ہے کہ ضابطہ  $\lambda = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲^2 - ۴ \times ۵ \times ۲۱}}{2 \times ۵}$  ..... (۱)

کی مدد سے کسی مساوات درجہ دوم کی دونوں اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں، مگر یاد رہے کہ نتیجہ (۱) میں مرکب مقدار  $۲ - ۴ \times ۵ \times ۲۱$  کا جذر شامل ہوتا ہے ہم مساوات کے حل کو ساوہ صورت میں نہیں لاسکتے جب تک کہ ہمیں  $\lambda$ ،  $۲$ ،  $۵$  کی عددی قیمتیں نہ دی ہوئی ہوں۔ بعض اوقات ایسا ہوگا کہ یہ قیمتیں مندرجہ کرنے سے  $۲ - ۴ \times ۵ \times ۲۱$  ایک مربع کامل نہیں ہوگا اس صورت میں مساوات کا ٹھیک ٹھیک عددی حل معلوم نہیں ہو سکیگا لیکن تقریبی حل کسی درجہ صحت تک معلوم کرنا ممکن ہوگا۔

مثال ۲:  $۵\lambda^2 - ۱۴\lambda + ۱۰ = ۰$  کو حل کرو۔

یہاں  $۵ = ۱$ ،  $۱۴ = ۲$ ،  $۱۰ = ۵$  ج

$$\lambda = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲^2 - ۴ \times ۵ \times ۱۰}}{2 \times ۵}$$

$$\frac{89 \pm 16}{10} = \frac{200 - 289 \pm 16}{10}$$

$$\text{اب } 89 \pm 16 = 95 \pm 16 \text{ تقریباً}$$

$$254 \pm 16 = 95 \pm 16$$

$$5 \pm 5 \pm 1$$

یہ نتائج صرف اعشاریہ کے چار مقامات تک درست ہیں اور ان میں سے کوئی بھی مساوات کو بالکل صحیح طور پر پورا نہیں کرے گا۔ اگر معمول مقدار کی عددی قیمتیں خاص طور پر درکار نہ ہوں تو اصلوں کو اسی صورت میں چھوڑنا کافی ہوگا

$$95 \pm 16$$

مثال ۳۔ مساوات ۲ - ۳ - ۱۱ = ۰ کو حل کرو

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2}$$

$$\frac{11 \pm \sqrt{121 - 24}}{2}$$

$$\frac{11 \pm \sqrt{97}}{2}$$

اب تک جتنی مقداروں سے ہمیں واسطہ پڑا ہے ان کے متعلق ہمیں معلوم ہے کہ خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی ان کا مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے پس جہاں تک ہم جانتے ہیں کوئی مقدار یا عدد ایسا نہیں جس کا مربع - ۹ ہو یعنی ایک ایسی مقدار کا معلوم کرنا ناممکن ہے جو صحیح طور پر یا تقریباً - ۹ کے جذر کو تعبیر کرے۔ ایسی صورت میں مساوات کی

اصلیں خیالی کہلاتی ہیں -

$$\text{لا} = \frac{\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\text{ا}ج}}{۲} \quad \text{مساوات } \text{ا} \text{ لا}^2 + \text{ب} \text{ لا} + ج = ۰$$

کی دو اصلیں ہیں، ظاہر ہے کہ جب کبھی کسی مساوات کے لئے پہلے سے پہلے اج منفی ہوگا تو مساوات مفروضہ کی اصلیں خیالی ہو گئی۔

۳۹۔ پس درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے تین طریقے تھے -

(۱) اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

(۲) تکمیل مربع سے

$$(۳) \text{ صابطہ } - \frac{\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\text{ا}ج}}{۲} \text{ کی مدد سے}$$

طالب علم کو چاہئے کہ ان تینوں میں اچھی مشق اور دشواریں حاصل کرے۔  
سے پہلے اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کی جائے، اگر باوجود النظر  
میں یہ ممکن نہ ہو تو دوسرے یا تیسرے طریقے سے مدد لی جائے مگر یہ تیسرا  
طریقہ سراسر دوسرے پر مبنی ہے کیونکہ تکمیل مربع سے ہم نے  
مساوات  $\text{ا} \text{ لا}^2 + \text{ب} \text{ لا} + ج = ۰$  کی مجہول مقدار لا کی قیمتیں  
 $\text{لا} = \frac{\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\text{ا}ج}}{۲}$  معلوم کی ہیں، پس اگر مساوات اجزائے

ضربی کی مدد سے حل نہ ہو سکے تو طالب علم تکمیل مربع کے عمل سے اسے  
حل کرے - صابطہ کا یاد رکھنا بھی کئی لحاظ سے مناسب ہے، اس کی  
مدد سے صرف یہی نہیں کہ ہم کسی مساوات کی اصلوں کو فقط عددی قیمتیں  
نہم درج کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں بلکہ ہم جانتے ہیں کہ مرکب مقدار

**ب-۴ ج** کی علامت اصولوں کی نوعیت کا فیصلہ کرتی ہے۔  
 کیونکہ فرض کرو کہ درجہ دوم کی عام سے عام مساوات  
 $۱۱ا + ۱ب + ۱ج = ۰$  ہے جس میں  $۱ا$ ،  $۱ب$ ،  $۱ج$  معلوم مقدار میں  
 ہیں۔ اسکو حل کرنے سے

$$۱ا = \frac{۱ب + ۱ج - ۱ج}{۱}$$

یعنی اس مساوات کی اصلیں الگ الگ  $\frac{۱ب + ۱ج - ۱ج}{۱}$

$$۱ا = \frac{۱ب + ۱ج - ۱ج}{۱}$$

پس اگر  $۱ا$ ،  $۱ب$ ،  $۱ج = ۰$  مثبت مقدار تو اس کی دونوں اصلیں  
 حقیقی اور غیر مساوی ہوں گی۔

$$\text{مثلاً مساوات } ۱۱ا + ۱ب + ۱ج = ۰ \text{ میں}$$

$۱ب - ۴ ج = ۱۵ = ۴ \times ۲ - (۶) = ۴۸ + ۲۵ = ۷۳$  جو ایک مثبت  
 مقدار ہے اس لئے اس صورت میں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہونی چاہئیں۔

$$\text{ہم دیکھتے ہیں کہ اس مساوات کے لئے } ۱ا = \frac{۱ب + ۱ج - ۱ج}{۱}$$

$$= \frac{۸۵ + ۵۴ - ۵۴}{۱} = ۸۵ \text{ یا } ۳۸ - ۳۵ = ۳ \text{ (دونوں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں)}$$

جب علامت جذر کے اندر کی مقدار مثبت ہو تو ہم اس کا جذر نکال سکتے ہیں  
 اور اس طرح اصولوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر  $(۲)$ ،  $۱ب - ۴ ج = ۰$  منفی مقدار ہو تو اصلیں خیالی ہوں گی  
 کیونکہ علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے اس کے منفی ہونے کی وجہ  
 سے ہم اس کا جذر نہیں نکال سکتے۔

مثلاً  $۲$  لا  $۲$  لا  $۵$  لا  $۶$  = . اس مساوات کے لئے علامت جذر کے اندر کی مقدار = ب<sup>۲</sup> - ۴ ا ج = ۲۵ - ۴ × ۲ × ۶ = ۲۵ - ۴۸ = -۲۳ = -۲۳ = منفی مقدار

اس صورت میں دونوں اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$لا = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۴۸}}{۲} = \frac{-۵ \pm \sqrt{-۲۳}}{۲}$$

یعنی دونوں اصلیں فی الحقیقت خیالی ہیں، ہم -۲۳ کا جذر نہیں نکال سکتے اس لئے اصلوں کی تقریبی قیمتیں بھی نہیں معلوم ہو سکتیں۔

اگر (۳) ب<sup>۲</sup> - ۴ ا ج = . تو اصلیں مساوی ہو گئی۔

$$کیونکہ اس صورت میں \frac{ب}{۵۲} = \frac{ب - ۴ ا ب + ۴ ا ج}{۵۲}$$

$$- \frac{ب}{۵۲} = \frac{ب - ۴ ا ب + ۴ ا ج}{۵۲}$$

یعنی دونوں اصلیں ایک ہی مقدار -  $\frac{ب}{۵۲}$  کے مساوی ہیں

مثلاً مساوات  $۲$  لا  $۲$  لا  $۱۲$  لا  $۱۸$  = ۰ میں

$$ب<sup>۲</sup> - ۴ ا ج = ۱۲ - ۴ × ۲ × ۱۸ = ۱۲ - ۱۴۴ = -۱۳۲ = -$$

پس مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔

اور وہ فی الحقیقت ہیں بھی کیونکہ  $۳ = \frac{ب + ۴ ا ب - ۴ ا ج}{۵۲} = \frac{۱۲ + ۴۰ - ۷۲}{۵۲}$

$$اور \frac{ب - ۴ ا ب + ۴ ا ج}{۵۲} = \frac{۱۲ - ۴۰ + ۷۲}{۵۲} = ۳$$

ہر ایک افضل ۳ کے مساوی ہے۔

مساوات  $۲$  لا  $۲$  لا  $۱۲$  لا  $۱۸$  = ۰ اس طرح کہی جاسکتی ہے۔



$$0 = (3 + 2x)(3 + 2x) =$$

$$0 = (3 + 2x)^2 \quad \text{یا} \quad 0 = (3 + 2x)(3 + 2x)$$

یعنی دائیں جانب کا رکن مربع کامل ہے، پس اصلیں  $3 + 2x = 0$  اور  $3 + 2x = 0$  ہیں۔

ہم نے اثباتِ عمل میں دیکھا کہ اگر کسی مساوات میں  $3 + 2x = 0$  اور  $3 + 2x = 0$  تو دائیں جانب کا جملہ درجہ دوم مربع کامل ہوتا ہے۔ پس  $3 + 2x = 0$  اور  $3 + 2x = 0$  کی شکل کے جملہ درجہ دوم کے مربع کامل ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ  $3 + 2x = 0$  یا برعکس اس کے اگر کسی جملہ درجہ دوم کے لئے  $3 + 2x = 0$  تو وہ جملہ مربع کامل ہوگا۔

پس یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ایک مساوات درجہ دوم کی اصلیں کیسی ہیں حقیقی یا خیالی یا مساوی وغیرہ وغیرہ یہ ضروری نہیں کہ مساوات کو حل کیا جائے، بلکہ یہ معلوم کر لینا کافی ہے کہ اس مساوات کے لئے  $3 + 2x = 0$  اور  $3 + 2x = 0$  کی کیا علامت ہے۔

اگر مثبت ہے تو دونوں اصلیں حقیقی ہیں

اگر منفی " " خیالی ہیں۔

اگر  $3 + 2x = 0$  تو " مساوی ہیں وغیرہ وغیرہ

مگر بعضوں کی نوعیت کے متعلق یہ بحث، سائل مساوات درجہ دوم سے تعلق رکھتی ہے جو اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔  
اس میں صرف مساوات درجہ دوم کے حل سے سروکار ہے۔

### ۴۰۔ متفرق مثالیں

مثال ۱۔  $۲۲۵ = ۳۳ - ۲ - ۱$  کو حل کرو۔

معیاری صورت میں لانے سے  $۲۲۵ = ۳۳ - ۲ - ۱$

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے  $(۱ - ۲) (۳ - ۲) = ۲۲۵$

یعنی  $۱ - ۲ = ۹$  یا  $۲۵$  جس سے  $۱ - ۲ = ۳$  یا  $۵$

مثال ۲۔  $\frac{۱ - ۲}{۱ + ۲} = \frac{۴ + ۲}{۴ - ۲} = \frac{۵ - ۲}{۵ + ۲} = \frac{۱۳ + ۲}{۳ - ۲}$

طرفین مساوات کو الگ الگ منفرد کرنے سے

$$\frac{(۱ - ۲)(۱۳ + ۲)}{(۱ + ۲)(۴ - ۲)} = \frac{(۱۵ + ۲)(۵ - ۲)}{(۵ + ۲)(۳ - ۲)}$$

یعنی  $\frac{۱۴}{(۱ + ۲)(۴ - ۲)} = \frac{۱۶}{(۵ + ۲)(۳ - ۲)}$

اسلئے  $۱ = \frac{۱}{(۱ + ۲)(۴ - ۲)} = \frac{۱}{(۵ + ۲)(۳ - ۲)}$  یا

یعنی  $۱۵ - ۲ = ۴ - ۲ = ۲ - ۱$

جس سے  $۱۵ - ۲ = ۸ - ۱$  یعنی  $۱ = ۸$

پس  $۱ = ۸$  اور  $۱ = ۸$  مطلوبہ اصلیں ہیں۔

مثال ۳۔  $۱۶ = \frac{۶۰}{۱۲ - ۲} - ۲ - ۱$

$(۱۲ - ۲)$  کو  $۱۶$  کے مساوی رکھنے سے

$۱۶ = \frac{۶۰}{۱۲ - ۲}$  یعنی  $۱۶ = ۱۱ - ۱$  یا  $۶۰ = ۱۱$

یعنی  $(۱۲ - ۲)(۱۱ - ۱) = ۶۰$

جس سے  $۱۲ = ۵$  یا  $۵$

لیکن ماکوہم نے لا - م لا کے مساوی فرض کیا تھا اس لئے

$$لا - م = لا - ۱۲ \text{ یا } لا - م = لا - ۵$$

$$\text{پس } لا - م = لا - ۱۲ = ۰ \text{ یا } لا - م = لا - ۵ = ۰$$

$$\text{یعنی } (لا - ۶) (۶ + لا) = ۰ \text{ یا } (لا - ۵) (۵ + لا) = ۰$$

$$\text{پس } لا = ۶ \text{ یا } لا = ۵$$

### مثلاً نمبری ۹

معاملات ذیل کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ لا - لا = ۲ + لا \quad ۲ - ۲ لا + لا = ۲ - لا$$

$$۳ - لا = لا - ۳ \quad ۴ - لا = لا - ۴$$

$$۵ - لا = لا - ۵ \quad ۶ - لا = لا - ۶$$

$$۷ - لا = لا - ۷ \quad ۸ - لا = لا - ۸$$

$$۹ - لا = لا - ۹ \quad ۱۰ - لا = لا - ۱۰$$

$$۱۱ - لا = لا - ۱۱ \quad ۱۲ - لا = لا - ۱۲$$

$$۱۳ - لا = لا - ۱۳ \quad ۱۴ - لا = لا - ۱۴$$

$$۱۵ - لا = لا - ۱۵ \quad ۱۶ - لا = لا - ۱۶$$

$$۱۷ - لا = لا - ۱۷ \quad ۱۸ - لا = لا - ۱۸$$

$$۱۹ - لا = لا - ۱۹ \quad ۲۰ - لا = لا - ۲۰$$

$$۲۱ - لا = لا - ۲۱ \quad ۲۲ - لا = لا - ۲۲$$

$$۲۳ - لا = لا - ۲۳ \quad ۲۴ - لا = لا - ۲۴$$

$$۲۵ - لا = لا - ۲۵ \quad ۲۶ - لا = لا - ۲۶$$

$$۲۲ - ۳ لا^۲ - ۳ لا^۳ = ۱ - لا$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو اگر ان مساواتوں میں اصلوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک معلوم نہ ہو سکیں تو انہیں اعشاریہ کے دوسرے مقام تک صحیح طور پر دریافت کرو

$$۲۳ - لا^۲ - ۲ لا^۳ = ۱ - لا \quad ۲۴ - لا^۲ - ۳ لا^۳ = ۲ + لا$$

$$۲۵ - ۵ لا^۲ - ۹ لا^۳ = ۴ \quad ۲۶ - (۱+لا)(۴-لا) + (۲+لا)(۳-لا) = ۳$$

$$۲۷ - \frac{۱}{۱-لا} + \frac{۱}{۴+لا} + \frac{۱}{۳+لا} = ۲۸ - ۲(۱+لا) = \frac{۵-۳}{۱-لا}$$

$$۲۹ - لا^۲ - ۳ لا^۳ = ۶ - لا \quad ۳۰ - ۱۰ لا^۲ - لا^۳ = ۹$$

$$۳۱ - \frac{۱۰۰}{لا} = ۲۹ - لا^۲ \quad ۳۲ - لا^۲ + ۳۲ لا = ۴۵ - لا^۲$$

$$۳۳ - لا^۲ - ۱۳ لا^۳ = ۳۶ \quad ۳۴ - لا^۲ - ۳۵ لا^۳ = ۲۱۶$$

$$۳۵ - لا^۲ + \frac{۲۵۶}{۱۶} = \frac{۱}{لا} \quad ۳۶ - لا^۲ + \frac{۲۵۶}{۱۶} = \frac{۲۵۶}{۱۶} \quad ۳۷ - لا^۲ + \frac{۲۵۶}{۱۶} = \frac{۲۵۶}{۱۶}$$

$$۳۸ - لا^۲ = ۱ + لا^۲ \quad ۳۹ - لا^۲ = ۱$$

$$۴۰ - لا^۲ - ۲ لا^۳ = ۲ - لا \quad ۴۱ - لا^۲ - ۲ لا^۳ = ۲ - لا$$

$$۴۲ - لا(۱+لا)(۲+لا)(۳+لا) = ۲۴$$

$$۴۳ - لا(۱+لا)(۲+لا)(۳+لا) = ۱۲۰$$

$$۴۴ - لا(۱+لا)(۲+لا)(۳+لا) = ۳۸۵$$

$$۴۵ - \frac{۳-لا}{۳+لا} + \frac{۲-لا}{۲+لا} = \frac{۴-لا}{۴+لا} + \frac{۱-لا}{۱+لا}$$

$$۴۶ - \frac{۳}{(۲+لا)^۲} - \frac{۱}{۱+لا} = \frac{۲}{۵+لا} - \frac{۱}{۱+لا}$$

۴۷ - اب ہم چند ایسے عبارتی سوالات حل کریں گے جن سے درجہ دوم کی

مساواتیں پیدا ہوتی ہیں۔

**مثال ۱۔** دو عددوں کا فرق ۴ ہے اور انکے مربعوں کا مجموعہ ۱۰۶ ہے، انہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک عدد لا ہے، دوسرا لا + ۴ ہوگا

$$\text{موجب شرائط سوال } لا^2 + (لا + ۴)^2 = ۱۰۶$$

$$\text{یعنی } ۲ لا^2 + ۸ لا + ۱۶ = ۱۰۶$$

$$۲ لا^2 + ۸ لا - ۹۰ = ۰$$

$$\text{یعنی } لا^2 + ۴ لا - ۴۵ = ۰$$

$$۰ = (۵ - لا) (۹ + لا)$$

اس لئے لا = ۹ یا ۵

اگر لا کو ۵ کے مساوی فرض کیا جائے تو چھوٹا عدد ۵ ہے اور بڑا عدد

۱۰ ہے، پس ایک عددوں کا جوڑا جو شرائط مساوات کو پورا کرتا ہے ۵، ۱۰ ہے

اسی طرح اگر لا = ۹ تو بڑا عدد ہوگا ۱۳ = ۹ + ۴

پس دوسرا جوڑا ۹، ۱۳ ہے

**مثال ۲۔** ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۵۰ میل فاصلہ کرتی ہے

اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ کم ہوتی تو یہی فاصلہ طے کرنے میں

اس کو ۵ گھنٹے اور گنتے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گاڑی کی رفتار لا میل فی گھنٹہ ہے۔

لا میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے ۵۰ میل فاصلہ طے کرنے میں  $\frac{۵۰}{لا}$

گھنٹے مرث ہونگے اور لا - ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے وہی فاصلہ طے کرتے ہیں

$$\frac{۵۰}{لا - ۵} = \frac{۵۰}{لا} + ۵$$

اسی لئے شرائط سوال کے مطابق  $\frac{450}{9} = \frac{450}{5-9} \dots\dots\dots (۱)$

مربہ دینے سے  $450 = (5-9) 9 \times 5 = 450$

$5 = 450 - 9 \times 25 = 360$

$9 = 450 - 5 \times 25 = 225$

$0 = (25+9) (30-25)$

جس سے  $30 = 25$  یا  $25 = 30$

پس ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتی ہے منفی جواب ناقابل تسلیم ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ہر مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں ہوتی ہیں عبارتی سوالوں کے حل کرنے میں جو مساواتیں رونما ہوں گی ہم دیکھیں گے کہ انکی بعض اصلیں شرائط سوال کو پورا نہیں کریں گی موجودہ قیمت میں منفی رفتار سے یہ مراد ہوگی کہ گاڑی ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے پیچھے کی طرف جاتی ہے۔

یاد رکھو شرائط سوال کی مناسب ترمیم سے ہم منفی جواب کو کچھ معنی پہنچا سکتے ہیں۔

$30 = 25$  اور  $25 = 30$  شرائط مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں، اگر ہم

۰ کی بجائے - لکھیں تو مساوات محصلہ ہوگی

$0 = \frac{450}{9} = \frac{450}{5-9} \dots\dots\dots (۲)$

اور اس مساوات کی اصلیں  $30 = 25$  اور  $25 = 30$  ہوں گی

اب مساوات (۲) کی علامات دونوں طرف بدلنے سے

$5 + \frac{450}{9} = \frac{450}{9}$

اور یہ ذیل کے عبارتی سوال کی جبریہ صورت ہے۔

ایک گاڑی ۵۰ میل یکسان رفتار سے جاتی ہے، اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو فاصلہ طے کرنے میں اسے ۵ گھنٹے کم صرف ہوئے گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

مثال ۳۳ - ایک شخص نے اپنا گھوڑا ۱۰۵ روپیہ کو بیچا، اس کا نقصان فیصد روپوں کی اس تعداد کا  $\frac{1}{5}$  تھا جو اس نے گھوڑے کی خرید میں ادا کی، گھوڑے کی قیمت خرید معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گھوڑے کی قیمت خرید لا روپیہ ہے

نقصان فیصد =  $\frac{لا}{5}$

گھوڑے کی قیمت خرید لا روپیہ پر نقصان =  $لا \times \frac{لا}{5} = \frac{لا^2}{5}$  روپیہ

قیمت فروخت =  $(لا - \frac{لا^2}{5})$  روپیہ

اس لئے  $لا - \frac{لا^2}{5} = ۱۰۵$

یا  $لا^2 - ۵۲۵.۰۰ = ۰$

یعنی  $(لا - ۳۵.۰)(لا - ۱۵.۰) = ۰$

پس  $لا = ۳۵.۰$  یا  $۱۵.۰$

اور ان میں سے ہر ایک قیمت شرائط سوال کو پورا کرتی ہے۔

پس قیمت خرید ۳۵۰ روپیہ ہے یا ۱۵۰ روپیہ

مثال ۳۴ - دونلیاں ملکر ایک حوض کو ۱۲ منٹ میں بھر دیتی ہیں، اگر بڑی نلی اسی حوض کو چھوٹی نلی کی نسبت ۱۰ منٹ کم عرصہ میں بھر دے تو بتاؤ کہ یہ نلیاں فرداً فرداً حوض کو کتنی دیر میں بھر دینگیں فرض کرو کہ نلیاں الگ الگ حوض کو لا اور لا۔ ۱۰ منٹ میں

بالترتیب بھرتی ہیں۔

اگر یہ ایک ساتھ کھول دی جائیں تو یہ دونوں ملکر ایک منٹ میں حوض کا  $(\frac{1}{9} + \frac{1}{10-9})$  واں حصہ بھر دیں گی، لیکن حسب مفروضہ یہ ایک منٹ میں حوض کا  $\frac{1}{12}$  واں حصہ بھرتی ہیں اسلئے

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &= \frac{1}{10-9} + \frac{1}{9} \\ \text{یعنی } 12(10-9) &= 12(10-9) \\ \text{پس } 9 &= 120 + 9 \\ \text{جس سے } (12-9) &= 30 \\ \text{پس } 9 &= 30 \text{ یا } 12 \end{aligned}$$

اسلئے معلوم ہوا کہ چھوٹی نلی حوض کو ۳۰ منٹ میں اور بڑی ۲۰ منٹ میں میں بھر دیگی۔ دوسرا حل ۴ ناقابل تسلیم ہے۔

**مثال ۵۔** وسطی تقسیم ایک مفروضہ خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دے کہ کل خط اور ایک حصہ کی سطح دوسرے حصہ کے مربع کے مساوی ہو یا دوسرے الفاظ میں فرض کر دے کہ ایک خط  $AB$  کا طول  $AB$  ہے، اس پر ایک ایسا نقطہ  $N$  معلوم کر دے کہ

$$AB \times BN = AN^2$$

فرض کر دے کہ

$$AN = x, BN = 1-x$$

$$AB \times BN = AN^2 \text{ اب چونکہ}$$

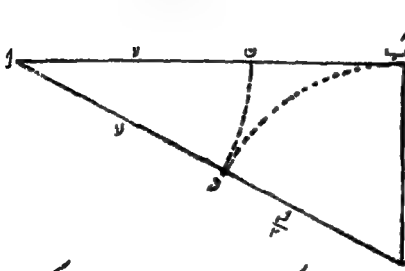
$$1(x) = x^2 \text{ اسلئے}$$

$$x^2 - x = 0 \text{ یعنی}$$



$$\text{پس لا} = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یعنی لاکھ دو قسٹیں یہ ہیں  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  یا  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  پس ل ب کی وسطی تقسیم داخل اور خارجاً دونوں طرح ہو سکتی ہے



(داخل) ب ج ل ب سے زاویہ قائمہ

بناتا ہے اور اس کا طول  $\frac{1}{2}$

اس لئے ا ج = ل ب + ب ج

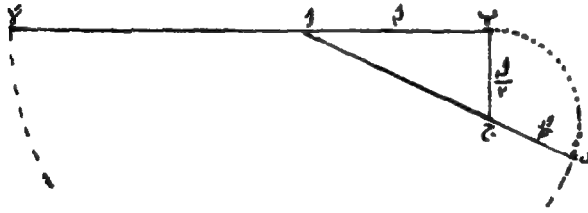
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

اس لئے ا ج =  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ج د کو ب ج کے مساوی بناؤ اور ان کو ا د کے مساوی کاٹو۔

اس لئے ا ج =  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  ج د کو ب ج کے مساوی بناؤ اور ان کو ا د کے

مساوی کاٹو۔

$$\text{لا} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \text{ج} - \text{ا ج} = \text{د} = \text{ا د}$$



(خارجاً)

ب ج ل ب

ب ج =  $\frac{1}{2}$  اس لئے ا ج =  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ج د کو ب ج کے مساوی بنائو اب ا د =  $\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$

ب ل کو خارج کر کے ا ل کو ا د کے مساوی کاٹو، ل مطلوبہ نقطہ تقسیم ہے۔

## امثلہ نمبری ۱۰

۱۔ دو عددوں کی باہمی نسبت  $\frac{5}{7}$  ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۷۱۵ ہے ۱۰ نہیں معلوم کرو۔

۲۔ ایک مثبت عدد معلوم کرو جو اپنے متکافی کے مساوی ہو۔

۳۔ تین عددوں کی باہمی نسبت ۳ : ۴ : ۵ ہیں اور ان کے مربعوں کا مجموعہ ۱۲۵۰ ہے، انہیں معلوم کرو۔

۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کا وتر ۱۵ سنٹی میٹر ہے اور باقی دو اضلاع کی نسبت ۳ : ۴ ہے، اضلاع کے طول معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کا وتر ۲ ہے اور اضلاع مساوی ہیں، اضلاع معلوم کرو۔

۶۔ ایک مستطیل کا رقبہ ۵۸۸ مربع فٹ ہے اور اس کے اضلاع کی نسبت ۳ : ۴ ہے، اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۷۔ ایک شخص اپنے لڑکے سے ۵ گنا بڑا ہے اور ان کی عمروں کے مربعوں کا مجموعہ ۹۳۶ ہے، ان کی عمریں معلوم کرو۔

۸۔ صحیح متصل عددوں کے ایسے جوڑے معلوم کرو جنکے حاصل ضرب ۳۳۲ اور ۲۱۰ ہوں۔

۹۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۳۱۳ ہو۔

۱۰۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۱۰۵ ہو۔

۱۱۔ تین متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۴۳۴ ہو۔

۱۲۔ دو متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مکعبوں کا فرق ۱۲۷ ہو۔

۱۳۔ تین متصل طاق عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۲۵۱ ہو۔

۱۴۔ ایسا عدد دریافت کرو جس کا مربع اس کے دو چند سے بقدر ۲۹۵ کے بڑا ہو۔  
 ۱۵۔ اگر ایک عدد کے مربع میں اس کا سہ چند جمع کر دیا جائے تو حاصل جمع ۵۹۸ بنتا ہے، وہ عدد معلوم کرو۔

۱۶۔ ایسے دو عدد معلوم کرو جن کا فرق ۳ ہو اور جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۸۵ ہو۔  
 ۱۷۔ دو متصل صحیح اعداد کے متکافیوں (اُلٹوں) کا مجموعہ  $\frac{25}{154}$  ہے، انہیں معلوم کرو۔

۱۸۔ دو عددوں کا مجموعہ ۴۵ ہے اور ان کے متکافیوں کا مجموعہ  $\frac{9}{11}$  ہے، انہیں معلوم کرو۔

۱۹۔ دو عددوں کا فرق ۵ ہے اور ان کے متکافیوں کا فرق ۱۰ ہے، انہیں معلوم کرو۔

۲۰۔ ۲۸ سال کے بعد ایک شخص کی عمر اسکی ۲۸ سال پہلے کی عمر کے مربع کے مساوی ہوگی، اس کی موجودہ عمر معلوم کرو۔

۲۱۔ اگر ایک ریل گاڑی کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو ۱۵۰ میل کا فاصلہ طے کرنے میں اسے ایک گھنٹہ کم لگتا، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک شخص ۱۰۸ میل چلتا ہے، اگر اس کی رفتار ۲ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو وہ اس مسافت کو  $\frac{1}{4}$  گھنٹہ کم عرصہ میں طے کر لیتا، اسکی رفتار معلوم کرو۔

۲۳۔ جتنے عرصہ میں ایک ریل گاڑی ۲۰۹ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے اس سے ۱۶ منٹ کم عرصہ میں یہ فاصلہ طے ہو سکتا ہے بشرطیکہ گاڑی کی رفتار ایک میل فی گھنٹہ زیادہ کر دی جائے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۴۔ اگر ایک گاڑی کا پیہ جسکا محیط  $\frac{13}{22}$  فٹ ہے ایک چکر لگانے میں ایک سکنڈ زیادہ لے تو گاڑی کی رفتار  $\frac{2}{11}$  میل فی گھنٹہ کم ہوگی، گاڑی کی

رفتار معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک شخص نے ایک گھڑی ۹۶ روپیہ کو بیچی اور جتنے روپیہ میں اسے نویدا تھا اتنے فیصد نفع اٹھایا، اس کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۶۔ ایک شخص نے اپنی موٹر سیکل کو ۱۶ پونڈ میں بیجا اور جتنے پونڈ اس کی قیمت خریدتی اتنے فیصد نقصان اٹھایا سیکل کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک شخص نے ۱۰ روپیہ کو گھوڑا خریدا اور ۳۷۵ روپیہ کو لافنی صد کے نفع پر بیچ دیا، لا معلوم کرو۔

۲۸۔ ۱ اور ۲ ملکر ایک کام کو ۲ دن میں کر لیتے ہیں، اسی کام کو ختم کرنے میں ۱ ب کی نسبت ۳ دن زیادہ لیتا ہے، بتاؤ کہ ۲ اس کو کتنے دن میں ختم کر سکتا ہے۔

۲۹۔ ایک خاص کام کی تکمیل میں ۱ ب کی نسبت ۵ دن زیادہ لیتا ہے اور ج کی نسبت ۹ دن زیادہ، ۱ اور ۲ دونوں ملکر اس کام کو اتنے ہی عرصہ میں کر لیتے ہیں جتنے میں ج کرتا ہے، بتاؤ کہ تینوں الگ الگ اسے کتنے عرصہ میں کر سکیں گے۔

۳۰۔ ایک مستطیل کھیت کا رقبہ ۲۰۰۰ مربع گز ہے اور اس کا مجموعہ اضلاع ۸۰ گز ہے، اس کے اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک مستطیل کھیت کا ایک ضلع دوسرے کی نسبت بقدر ۷ فٹ کے بڑا ہے اور اس کا رقبہ ۴۹۴۰ مربع فٹ ہے، اسکے اضلاع معلوم کرو۔

۳۲۔ مستطیل شکل کے دو کھیتوں کا رقبہ ایک ہی ہے ۸۰۰ مربع گز، لیکن ان کے طولوں کا فرق ۱۰۰ گز ہے اور عرضوں کا فرق ۴ گز، اسکے اضلاع معلوم کرو۔

۳۳۔ ایک مستطیل کھیت ۵۰ فٹ لمبا اور ۴۴ فٹ چوڑا ہے، اس کے

چاروں طرف باہر کی طرف یکساں چوڑائی کا ایک راستہ ہے جس کا رقبہ ۵۴۰۰ مربع فٹ ہے، اس کی چوڑائی معلوم کرو۔

۳۴۔ مربع پتھروں سے ایک کمرہ کی فرش بندی کرنے کے لئے ۳۶۰ پتھر درکار ہوتے ہیں، اگر ہر ایک پتھر ایک اینچ زیادہ لمبا اور ایک اینچ زیادہ چوڑا ہو تو ۲۵۰ پتھروں کی ضرورت ہوتی ہے، پتھروں کے ابعاد معلوم کرو۔

۳۵۔ دونیاں ملکہ ایک حوض کو ۴۰ منٹ میں بھر دیتی ہیں اور بڑی نلی اس کو بھرنے میں چھوٹی نلی کی نسبت ایک گھنٹہ کم لیتی ہے، بتاؤ کہ چھوٹی نلی اس کو کتنے منٹ میں بھر سکتی ہے۔

۳۶۔ انڈوں کی قیمت میں ۲ آنہ فی درجن تخفیف ہونے کے باعث ۲ روپیہ ۱۰ آنہ میں معمول سے ۶ زیادہ انڈے آسکتے ہیں، انڈوں کی قیمت فی درجن معلوم کرو۔

۳۷۔ میں نے ایک صد روپیہ میں کرکٹ کھیلنے کے چند گیند خریدے، اگر قیمت خرید فی گیند ایک روپیہ کم ہوتی تو اسی رقم میں ۵ گیند اور خرید ہو سکتے ہیں، ہر گیند کی قیمت دریافت کرو۔

۳۸۔ خط  $\frac{1}{2}$  ب کا طول  $\frac{1}{2}$  ج اور  $\frac{1}{2}$  اینچ ہے،  $\frac{1}{2}$  ب کو ج تک اتنا خارج کرو کہ  $\frac{1}{2}$  ج  $\times$  ب ج = ۳۹ مربع اینچ،  $\frac{1}{2}$  ج اور ب ج کے طول معلوم کرو۔

۳۹۔ خط  $\frac{1}{2}$  ب کا طول ۲۰ اینچ ہے، اسکو دو حصوں  $\frac{1}{2}$  ج اور ج ب میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ  $\frac{1}{2}$  ج خطوط ج ب اور  $\frac{1}{2}$  ب کے درمیان وسط تناسب ہے،  $\frac{1}{2}$  ج کا طول معلوم کرو۔

۴۰۔ اگر  $\frac{1}{2}$  ب =  $\frac{1}{2}$  تو اوپر کے سوال کو حل کرو۔

## مساوات درجہ دوم کا ترسیم حل

۴۲۔ ہر مساوات درجہ دوم کو معیاری صورت میں لانے سے مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم رہ جاتا ہے اور دوسری طرف صفر، مثلاً مساوات لا<sup>۱</sup> - ۱۱ = ۷ لا کو معیاری صورت میں لانے سے حاصل ہوگا لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ = ۰

موزا لڈ کر صورت میں مساوات کے دائیں طرف کا رکن لا<sup>۱</sup> - ۷ لا + ۱۱ کا ایک جملہ یا تفاعل درجہ دوم ہے کیونکہ لا کی بڑی سے بڑی قوت اس میں دو ہے، اب اگر لا مختلف قیمتیں اختیار کرے تو یہ تفاعل لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ بھی مختلف قیمتیں اختیار کریگا اور لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی، پس اگر بلحاظ دو قائم محوروں کے لا کی قیمتوں کو بطور فاصلہ اور لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمتوں کو بطور معین مرسم کیا جائے تو لا اور لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمتوں کے ہر ایک جوڑے سے ایک نقطہ حاصل ہوگا اور ایسی متناظر قیمتوں کے بیشمار جوڑوں سے بیشمار نقطے ملینگے جن کو ملانے سے ایک منحنی حاصل ہوگا جو جملہ درجہ دوم یا تفاعل لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم ہوگا دیکھو دفعہ ۴۳۔

طالب علم اس ترسیم پر کوئی نقطہ لے اور اس کے محدودوں پر غور کرے، ایسے کسی نقطہ کا فاصلہ لا کی ایک قیمت ہے اور اس کا معین تفاعل لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمت ہے، پس لا کی مختلف قیمتوں کے لئے اس ترسیم کے معین تفاعل لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی مختلف قیمتوں کو

تعبیر کرتے ہیں۔ ہم لا اور تفاعل لا۔ ۷ لا + ۱۱ کے باہمی رشتہ سے بخوبی واقف ہیں، لا کی کسی ایک قیمت کے ساتھ تفاعل لا۔ ۷ لا + ۱۱ کی ایک قیمت لگی ہوئی ہے اور تفاعل کی کسی ایک قیمت کے ساتھ لا کی ایک قیمت وابستہ ہے، اب اگر ان میں سے کسی ایک کی کوئی قیمت دی ہوئی ہو تو اس ترسیم کی دوسرے کی متناظر قیمت فقط پیمائش سے معلوم ہو سکتی ہے مثلاً اگر لا = ۲ تو فصلہ ۲ کے جواب میں جو معین ہے اس کا طول لا۔ ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمت ہے اور برعکس اس کے اگر لا۔ ۷ لا + ۱۱ کی کسی مقررہ عددی قیمت (مثلاً ۱) کے لئے ہمیں لا کی متناظر قیمت معلوم کرنا منظور ہو تو ہمیں شکل میں اس مقررہ طول (۱) کا ایک معین قائم کرنا چاہیئے، اس معین کے جواب میں جو فصلہ ہو اس کا طول لا کی متناظر قیمت ہے۔

اب بالخصوص فرض کرو کہ تفاعل لا۔ ۷ لا + ۱۱ صفر کے مساوی ہے اور تفاعل کی اس قیمت (صفر) کے جواب میں ہم لا کی متناظر قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا چاہتے ہیں یا بانفاذ دیگر ہمیں شکل سے لا کی وہ قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا ہے جو لا۔ ۷ لا + ۱۱ کو صفر بنادیں۔

اس صورت میں چونکہ لا۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ اسلئے معین زیر بحث کا طول صفر ہوگا۔ پس ہمیں شکل میں ترسیم پر کے ان نقاط کی تلاش کرنی چاہیئے جن کے معین صفر ہوں، ظاہر ہے کہ ایسے نقطے صرف وہی ہو سکتے ہیں جہاں ترسیم محور لا سے ملتی ہے۔

کیونکہ اس محور کے ہر نقطہ کا ما، محدود صفر ہے، پس جن نقاط پر منحنی محور لا سے ملتا ہے انکے معین صفر ہیں (یعنی ان نقاط کے لئے

لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ سلئے انکے فضلے لا کی مطلوبہ قیمتیں ہیں۔  
اب ہم نے ایک ضروری سوال کو حل کر لیا، ہم نے ترسیم کی مدد سے  
لا کی وہ قیمتیں معلوم کر لیں جو لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ کو صفر بنا دیں یعنی ہم نے  
مسادات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں معلوم کر لیں کیونکہ ہم جانتے ہیں  
کہ مسادات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کے حل یا اصل سے لا کی وہ قیمت  
یا قیمتیں مراد ہیں جو طرفین مساوات کو برابر کر دیں یعنی جو تفاعل لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱  
کو صفر کے مساوی بنا دیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم اور محور لا کے نقاط  
تقاطع کے فضلے اس شرط کو پورا کرتے ہیں۔

پس مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کے  
لئے ہم نے اسے معیاری صورت میں لکھا، دائیں جانب کے جملہ درجہ دوم  
یا تفاعل کی ترسیم بنائی، جن نقاط پر یہ ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے ان کے  
فصلوں کے طول مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

اور بالعموم مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کو ترسیمی طریق پر حل کرنے  
کے لئے ہمیں لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی ترسیم بنانی چاہیے، جن نقاط  
پر یہ ترسیم محور لا سے ملتی ہے انکے فضلے مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰  
کی اصلیں ہیں۔

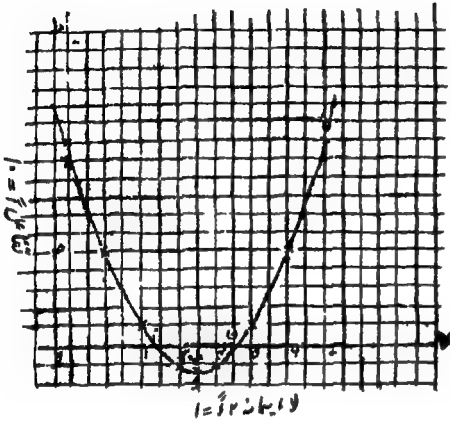
۴۴۔ اس دفعہ کی جملہ مسئلہ کو طالب علم غور سے پڑھے اور مختلف پیمانوں  
پر خشکیں بنا کر خود انہیں حل کرے، قریب ترین درجہ صحت تک نتائج  
حاصل کرنے کی کوشش کیجائے۔

مثال ۱۔ لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم بناؤ اور مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰  
کی اصلیں معلوم کرو۔



اثنائے عمل میں دیکھو کہ لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟ نیز لا کی کن حقیقی قیمتوں کے لئے یہ تفاعل مثبت ہے اور کن کے لئے منفی

حسب دفعہ سابق ہم تفاعل لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم بناتے ہیں، طالب علم جانتا ہے کہ یہاں دو متغیر لا اور لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ ہیں، لا کی قیمتوں کو محور لا پر نا پو، پیمانہ ایک اینچ = ۵ یعنی دو چھوٹے حصے = ۱



لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی قیمتوں کو محور ما پر نا پو، پیمانہ ایک اینچ = ۱۰ یعنی ایک چھوٹا حصہ = ۱ جب

۷	۶	۵	۴	۳، ۵	۳	۲	۱	لا = ۰
۴۹	۳۶	۲۵	۱۶	۱۲، ۲۵	۹	۴	۱	لا² = ۰
۳۸	۳۱	۲۴	۱۷	۱۳، ۵	۱۰	۳	۲	۷ - لا + لا = ۱۱
۱۱	۵	۱	۱	۱، ۲۵	۱	۱	۵	لا² - لا + لا = ۱۱

اس لئے (۱۱، ۰)، (۵، ۱)، (۲، ۱)، (۳، ۱)، (۵، ۳)، (۳، ۵)، (۱، ۲۵)، .... ترسیم پر کے نقطے ہیں، شکل بالا میں انہیں مرتب کر کے ایک منحنی ان نقاط میں سے کھینچا گیا ہے جو لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم ہے۔

یہ ترسیم محور لا سے دو نقاط م اور ن پر ملتی ہے، ان نقطوں کے معین صفر ہیں یعنی ان نقاط کے لئے لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ صفر کے مساوی ہے پس ان نقطوں کے فاصلے لا کی مطلوبہ قیمتیں ہیں جو مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = کو پورا کرتی ہیں۔

م کا فاصلہ = ۳۵

اور ن کا فاصلہ = ۶

اس لئے ۳۵ اور ۶ مساوات مفروضہ لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = کی حل ہیں۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط م اور ن کے درمیان منحنی کا جو حصہ ہے وہ محور لا سے نیچے واقع ہے یعنی لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ کی قیمت منفی ہے جب تک کہ لا کی قیمت ۳۵ اور ۶ کے درمیان واقع ہے لیکن لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ مثبت ہے۔

لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ کی کم سے کم جبریہ قیمت بڑے سے بڑے منفی معین اب = - ۲۵ سے تعبیر ہوگی۔ جبریہ طریق پر بھی یہ قیمت باسانی معلوم ہو سکتی ہے۔

لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = (لا -  $\frac{۷}{۲}$ ) -  $\frac{۵}{۲}$  اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے (لا -  $\frac{۷}{۲}$ ) مثبت ہے اور صفر سے زیادہ ہے سوائے اس صورت کے جبکہ لا =  $\frac{۷}{۲}$  پس اگر لا =  $\frac{۷}{۲}$  تو لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = (لا -  $\frac{۷}{۲}$ ) -  $\frac{۵}{۲}$  = -  $\frac{۵}{۲}$  جو اس تغاقل کی کم سے کم قیمت ہے۔

نوٹ - جبریہ طریق پر مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کو حل کرنے سے

$$لا = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴ \times ۱۱}}{۲} = \frac{۷ \pm ۳}{۲}$$

اگر ماہ کی تقریبی قیمت ۲۰۲۳۶ فرض کی جائے تو لا کی قیمتیں ۱۸۶۱۸

اور ۲۵۳۸۲ حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۲۔

تریسہ طریقے سے

مسادات

۵ لا + ۲ لا = ۲۵

کو حل کر دو۔

سب سے

پہلے ہم

۵ لا + ۲ لا = ۲۵

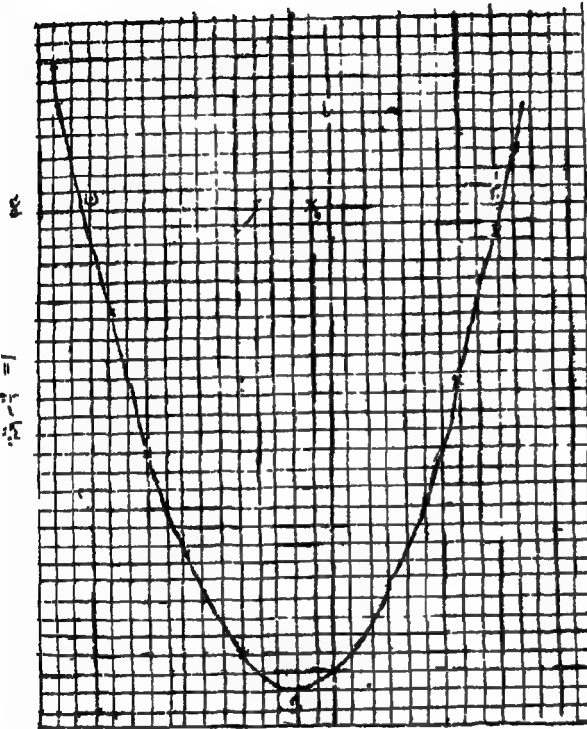
کی تریسیم

بنائیں گے،

اختصار کی خاطر

فرض کر دو کہ

$$6 = 5 \text{ لا} + 2 \text{ لا} = 25$$



یہاں ۲ = ۱

۳ =	۲۸۰	۲۰	۱۶۸۰	۱۰	۲	۵۸	۱۵۴	۱	۵۶	۰ = لا
۴ =	۲۸۵۸	۲۰	۱۶۵۸۰	۵	۲۰	۲۱۵۲۰	۹۱۸۰	۵	۱۶۸۰	۵ لا = ۲۵
۲۵ =	۳۳۵۴	۲۲	۳۱۵۴	۲۹	۱۶	۱۶۵۸	۱۹۵۴	۲۱	۲۲۵۴	۲۵ لا = ۲۵ - لا
۸	۵۵۸	۱۲	۱۸۱۴	۲۲	۱۰	۱۵۴	۹۵۴	۱۶	۲۰۵۸	۲۵ لا + ۲ لا = ۲۵

لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناچو، یہاں ۲ = ۱

تفاعل ۵ لا + ۴ لا - ۲۵ کی قیمتوں کو محور ما پر نا پو پیانہ ۱۰ = ۱۰  
نقاط (۲۰۵۸-۱۵۶)، (۱۶-۱۱)، (۱۳۴-۱۵۶)، (۳۴۲-۱۵۶) وغیرہ وغیرہ  
کو مرتبہ کرنے سے اوپر کی ترسیم بنائی گئی ہے، جن نقاط ۴ اور ۵ پر  
یہ ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے ان کے فصلے سادات کی مطلوبہ اصلیں ہیں  
و م = ۱۵۹ تقریباً

اور ون = - ۲۵۴

پس ۱۵۹ اور ۲۵۴ سادات ۵ لا + ۴ لا - ۲۵ = ۰  
کی اصلیں ہیں۔

تصدیق جب لا = ۱۵۹ تو ۵ لا + ۴ لا - ۲۵ = ۲۵۴ + (۳۵۹۱) = ۲۵۴  
۲۵۴ - ۴۵۹ + ۱۸۵۰۵ =

$$۵۹۵ =$$

پس جب لا = ۱۵۹ تو ۵ لا + ۴ لا - ۲۵ تقریباً صفر کے مساوی ہے  
اس لئے ۱۵۹ ایک اصل ہے، اسی طرح طالب علم اس کی تصدیق  
کرے کہ - ۲۵۴ بھی سادات معلومہ کی اصل ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی قیمتوں - ۲۵۴ اور ۱۵۹ کے  
درمیان جو ترسیم کا حصہ ہے وہ محور لا کے نیچے واقع ہے یعنی اس  
حصہ کے سب معین منفی ہیں، پس لا کی ان تمام حقیقی قیمتوں کے لئے  
جو - ۲۵۴ اور ۱۵۹ کے درمیان واقع ہیں ۵ لا + ۴ لا - ۲۵  
منفی ہے لیکن ان حدود کے باہر باقی سب قیمتوں کے لئے مثبت ہے،  
نیز بڑے سے بڑا منفی معین تقریباً ۲۵۴ ہے جو ۱۵۹ سے  
گزرتا ہے، پس ۵ لا + ۴ لا - ۲۵ کی کم سے کم جبریہ قیمت ۲۵۴ ہے

مثال ۳۔ ۱ = ۳ - ۴ - ۴ - ۴ لایا کی ترسیم بناؤ۔  
 اس کی مدد سے ۴ لایا + ۴ لایا = ۳ کی اصلیں معلوم کرو،  
 نیز ثابت کرو کہ جملہ ۳ - ۴ - ۴ لایا مثبت ہے لایا کی ان تمام  
 حقیقی قیمتوں کے لئے جو ۵۔ اور ۱۵ کے درمیان واقع ہوں  
 لیکن لایا کی باقی سب قیمتوں کے لئے یہ سنی ہے ۱ مزید بر این  
 ۳ - ۴ لایا - ۴ لایا کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔  
 ۴ - ۴ لایا - ۴ لایا

۰ = ۱	۱۵	۱	۱۵	۲	۵	۱	۱۵	۲	۲۵
۳ = ۴ - ۴	۱	۱	۳	۵	۵	۴	۹	۱۱	۱۳
۴ = ۴ لایا	۱	۲	۴	۶	۱۲	۱	۲	۹	۲۵
۳ = ۱	۰	۵	۱۲	۲۱	۴	۳	۰	۵	۱۲



لا کی قیمتوں کو محور لا پر نا پو، پیمانہ  $1 = 2$   
 اور لا کی قیمتوں کو محور ما پر نا پو، پیمانہ  $1 = 10$   
 جدول بالا کے نقاط کو مرتسم کرنے سے اوپر کی ترسیم حاصل ہوتی ہے  
 مساوات  $2 = 3 + 4 - 5$  کی اصلیں لا کی دو قیمتیں ہیں  
 جن کے لئے مائینی  $3 - 4 = 5 - 6$  لا  $6 - 5$  صفر کے مساوی ہے، اور یہ  
 صرف نقاط م اور ن پر واقع ہوتا ہے جہاں ترسیم محور لا کو قطع کرتی  
 ہے پس مساوات کی مطلوبہ اصلیں  $5$  اور  $1.5$  ہیں۔  
 اب نقاط م اور ن کے درمیان ترسیم کا جو حصہ ہے وہ محور لا  
 کے اوپر واقع ہے پس مائینی  $3 - 4 = 5 - 6$  لا  $6 - 5$  مثبت رہتا ہے جب تک  
 کہ لا کی قیمت  $5$  اور  $1.5$  کے درمیان واقع ہوتی ہے، نیز ظاہر  
 ہے کہ لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے  $3 - 4 = 5 - 6$  لا  $6 - 5$  منفی ہے۔  
 $3 - 4 = 5 - 6$  لا  $6 - 5$  کی بڑی سے بڑی قیمت ترسیم کے سب سے بڑے عین  
 کے مساوی ہے، جہر یہ طریق پر اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔  
 $3 - 4 = 5 - 6$  لا  $6 - 5$   $1 + 3 = 4 + 2$  لا  $2 + 1 = 3 + 2$  لا  $2$   
 اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے  $2 + 1 = 3 + 2$  لا  $2$  مثبت ہے سو  
 اس صورت کے جبکہ لا  $2 = 1$  اور جب لا  $2 = 1$  تو  $2 + 1 = 3 + 2$  لا  $2$   
 اور اس صورت میں جملہ کی قیمت  $2$  کے مساوی ہے جو اس کی قیمت  
 اعظم ہے۔

مندرجہ بالا تین مثالوں میں ہم نے تفاعل لا  $2 = 1 + 1$   
 (۱) یا مساوات  $1 = 2 - 1 + 1$

تفاعل  $5 \text{ لا} + 3 \text{ م} - 2 \text{ لا} = 25$  اور تفاعل  $3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 3 \text{ لا} - 3$  (۳)  
 مساوات  $5 \text{ لا} + 3 \text{ م} - 2 \text{ لا} = 25$  (۲) یا مساوات  $3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 3 \text{ لا} - 3$  (۳)  
 کی ترسیمیں بنائیں، اور طالب علم غور سے دیکھے کہ تینوں صورتوں میں ترسیموں  
 کی عام شکل اور بناوٹ ایک ہی ہے، اور یہ بالعموم درست ہے کہ

تفاعل  $5 \text{ لا} + 3 \text{ م} - 2 \text{ لا} = 25$

یا مساوات  $3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 3 \text{ لا} - 3$

کی ترسیم بھی اسی شکل کی ہوگی، اس سغنی کو قطع مکانی یا صرف مکانی کہتے ہیں  
 دفعہ ذیل میں ہم اس کے خواص پر مختصر بحث کریں گے۔

ضروری - اس دفعہ میں ہم نے ایک جہول مقدار کی مساوات درجہ دوم  
 کو تربیتی طریق پر حل کیا، اس بات کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ یہ طریقہ  
 بالکل عام ہے اور کسی درجہ کی مساوات کے حل کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے،  
 ہم یہاں صرف درجہ سوم کی ایک مساوات کو تربیتی طریق پر حل کرنے سے  
 اس طریقہ کی مزید توضیح کریں گے۔

مثال - مساوات  $\frac{1}{5} \text{ لا} + 3 - 2 = 25$  کی اصلیں تربیتی طریق پر معلوم کر۔  
 سہولت کی خاطر جدول ذیل مرتب کی گئی ہے

لا	۵-	۴-	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۱۵۵	۲
۲ لا	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۲۵۲۵	۴
$\frac{1}{5} \text{ لا}$	۲۵-	۱۲۵۸-	۵۵۴-	۱۵۶-	۵۲-	۰	۵۲	۵۶۴	۱۵۶
$\frac{1}{5} \text{ لا} + 3 - 2$	۲-	۱۵۲	۱۵۶	۵۴	۱۵۲-	۲-	۵۸-	۵۹	۳۵۶

نقاط (۵-، ۲-)، (۴-، ۱۵۲) وغیرہ وغیرہ کو مرتب کرنے اور انکو ملانے سے

ذیل کی ترسیم حاصل ہوتی ہے،

چونکہ

ترسیم محور

لاگو صرف

تین نقاط

ل، م، ن

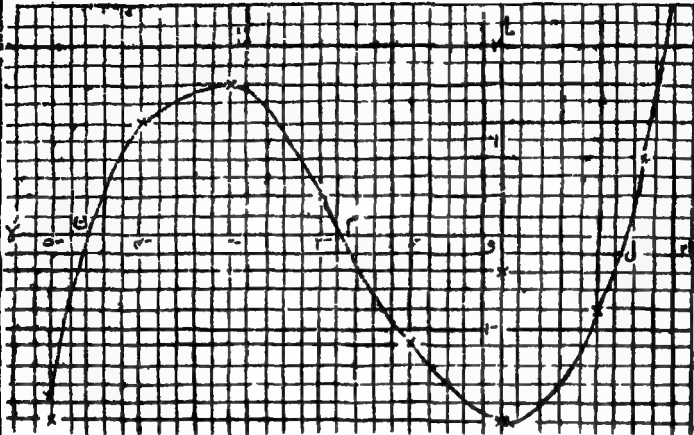
پر قطع کرتی

ہے۔

اسلئے

ان نقطوں

کے لئے



تفاعل  $\frac{1}{6} \text{ لا}^2 + \text{لا} - ۲$  صفر کے مساوی ہے۔

پس اُن نقاط کے فاصلے ول، دم، ون، مساوات کے مطلوبہ

حل ہیں۔ ول = ۱۵۲۵، دم = ۱۵۸، ون = ۴۱۶۔

پس ایک مجہول مساوات درجہ سوم  $\frac{1}{6} \text{ لا}^3 + \text{لا}^2 - ۲$  کی تین اصلیں تریسیمی

طریق سے ۱۵۲۵، ۱۵۸، ۴۱۶ معلوم ہوئیں۔

اوپر کے حل سے ظاہر ہے کہ یہ طریقہ ایک مجہول کی کسی درجہ کی مساوات

کے تقریبی حل معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ مثال ۱۔ ما = لا کی ترسیم

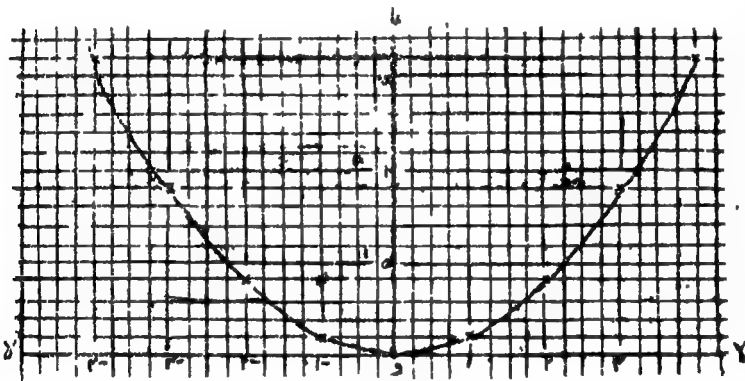
یہ ترسیم نہایت ضروری اور دلچسپ ہے، اس لئے مناسب ہے کہ

اسے موزون پیمانہ پر نہایت احتیاط کے ساتھ مرتسم کیا جائے۔



طالب علم جانتا ہے کہ مساوات  $x^2 - 10x + 25 = 0$  کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل  $y = x^2 - 10x + 25$  کی ہے۔ لہذا کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے  $y$  یعنی  $x$  کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان سے جدول ذیل مرتب کرو۔

...	۵ -	۴ -	۳ -	۲ -	۱ -	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
...	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶



جدول بالا سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $x$  کی کسی دو مساوی مگر مختلف علامت قیمتوں (مثلاً  $5$  اور  $-5$ ) کے جواب میں  $y$  کی ایک ہی قیمت ( $25$ ) ہے۔ محور  $x$  پر طول ناپنے کی اکائی فرض کرو  $1 = 2.5$  یعنی چار چھوٹے حصے  $1 = 1$  اور محور  $y$  پر  $1 = 10$ ۔

نقاط  $(1, 16)$ ،  $(2, 9)$  وغیرہ کو مرتسم کرنے اور ملانے سے  $y = x^2 - 10x + 25$  کی ترسیم حاصل ہوتی ہے ملاحظہ ہو شکل بالا، یہ منحنی قطع مکافی کہلاتا ہے۔ اس کے متعلق دو تین باتیں خاص طور پر غور طلب ہیں۔

(۱) طالب علم دیکھے کہ منحنی بان تمام ربعات اول اور دوم میں واقع ہے، کیونکہ  $MA = LA$  میں لا کو ہم خواہ کوئی مثبت یا منفی قیمت دیں لا یعنی ما کبھی منفی نہیں ہوگا اور اسلئے منحنی کا کوئی نقطہ محور لا سے نیچے واقع نہیں ہوگا لیکن اگر مساوات  $MA = -LA$  ہوتی تو لا کی تمام قیمتوں کے لئے ما منفی ہوتا یعنی منحنی بان تمام محور لا سے نیچے واقع ہوتا۔

ظاہر ہے کہ مساواتوں  $MA = LA$  کے منحنی بالکل ایک جیسے ہیں صرف

فرق یہ ہے کہ پہلا منحنی محور لا کے اوپر واقع ہے اور اس کا قعر اوپر کی طرف ہے (دیکھو شکل بالا) اور دوسرا بان تمام محور لا سے نیچے واقع ہے اور اس کا انحناء نیچے کی طرف ہے۔

اسی شکل میں اسی پیمانہ پر طالب علم خود  $MA = -LA$  کی ترسیم بنا کر ان امور کی تصدیق کرے اور دیکھے کہ محور لا دونوں صورتوں میں ہر دو منحنیات کا کام اس ہے۔

(۲) مساوات  $MA = LA$  اس طرح لکھی جاسکتی ہے  $LA = \pm MA$  اس سے ظاہر ہے کہ ما کی کسی خاص قیمت کے لئے لا کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی لیکن علامت میں مختلف ہیں اس لئے ترسیم بلحاظ محور لا کے متشکل ہے پس اگر ربع اول میں ہم چند نقطے ترسیم کر کے منحنی کی شکل معلوم کر سکیں تو ربع دوم میں بغیر اور نقطے فی الحقیقت ترسیم کرنے کے منحنی کی شکل معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ محور ما میں ایک طرف کا حصہ دوسری طرف کے حصہ کا عکس ہے۔

(۳) اگر لا کو تعداداً بڑھایا جائے تو لا یعنی ما بھی بڑھی سرعت سے

بڑھتا ہے اور چونکہ ہم لا کو بڑی سے بڑی مثبت یا منفی قیمت دے سکتے ہیں اس سے معلوم ہوا کہ منحنی مذکور ربعات اول اور دوم میں لا انتہائی ہلکا تک باہر کی طرف اوپر کو پھیلتا جاتا ہے۔

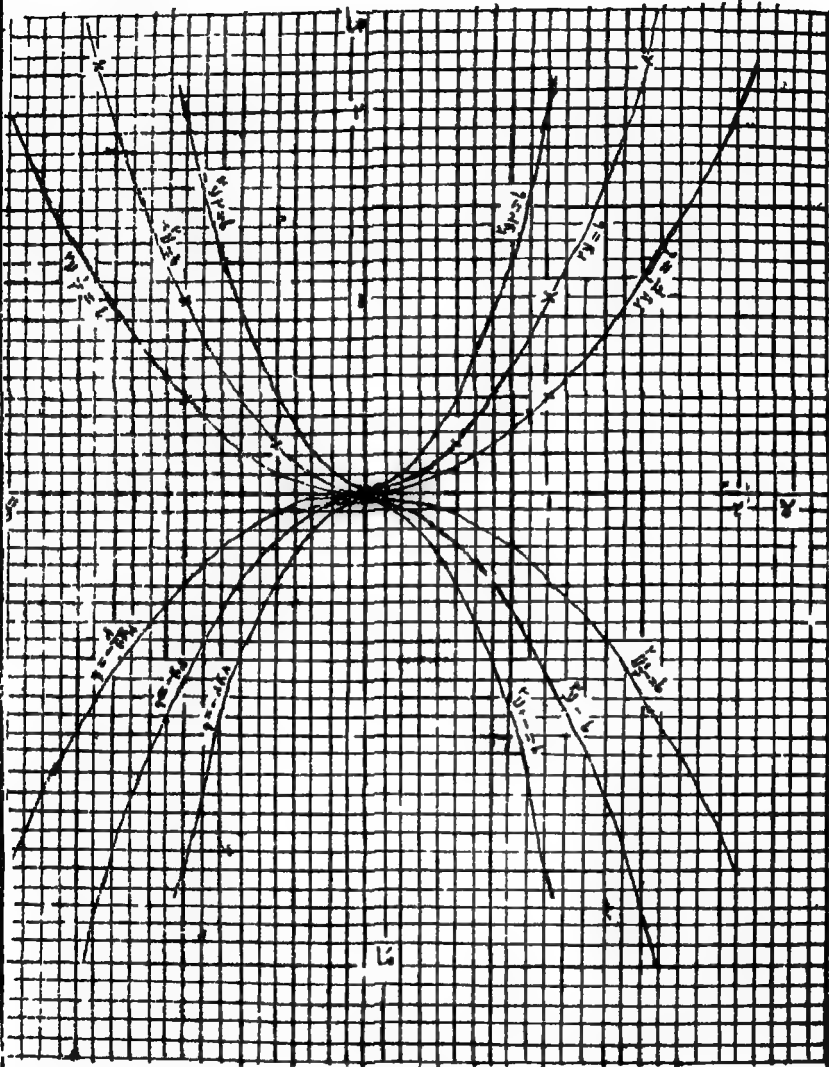
### مثال ۲۔ $ما = لا^۲$ کی ترسیم

اس مساوات  $ما = لا^۲$  میں لا کو کوئی عددی قیمتیں ۲، ۳، ۱۰ وغیرہ دینے سے کئی مساواتیں حاصل ہو سکتی ہیں  $ما = ۲^۲ = ۴$ ،  $ما = ۳^۲ = ۹$ ،  $ما = ۱۰^۲ = ۱۰۰$  وغیرہ وغیرہ، ایسی ہر ایک مساوات کی ترسیم ہم بعینہ مثال ۱ کے عمل کے موافق بنا سکتے ہیں یعنی پہلے ہم لا کی کوئی مناسب قیمتیں منتخب کریں اور اس کے بعد ان قیمتوں کے جواب میں ما کی قیمتیں معلوم کریں، لا، ما کی ان متناظر قیمتوں کو مرتسم کرنے سے ترسیم حاصل ہو سکتی ہے۔ لیکن ان مساواتوں کی ترسیمیں ہم ایک اور مفید اور مختصر طریقہ سے بناتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ  $لا$  مثبت ہے اور ۲ کے مساوی ہے، اس صورت میں مساوات مفروضہ  $ما = لا^۲$  ہوگی۔

سب سے پہلے طالب علم  $ما = لا^۲$  کی ترسیم بنائے (دیکھو مثال ۱) لا کی ایک ہی قیمت کے لئے  $لا^۲$  کی ترسیم کا معین  $لا^۲$  کی ترسیم کے معین سے دو چند ہے، پس اگر  $ما = لا^۲$  کے ہر ایک معین کو اوپر کی طرف اتنا خارج کیا جائے کہ نئے معین کا طول پہلے سے دو چند ہو جائے اور ان نئے معینوں کے سروں کو ایک مسلسل منحنی سے ملایا جائے تو یہ منحنی مساوات  $ما = لا^۲$  یا تفاعل  $لا^۲$  کی ترسیم ہوگا۔ اس طرح سے ہم تفاعل  $لا^۳$ ،  $لا^۴$  کی ترسیمیں  $لا^۲$  کی ترسیم

کے ہر معین کو بالترتیب لگنا یا آدھا کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل بالا میں محور لا کے اوپر جو منحنی ہیں وہ تقاطع  $y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = x^5, y = x^6, y = x^7, y = x^8, y = x^9, y = x^{10}, y = x^{11}, y = x^{12}, y = x^{13}, y = x^{14}, y = x^{15}, y = x^{16}, y = x^{17}, y = x^{18}, y = x^{19}, y = x^{20}$  کی ترسیبیں ہیں ان میں سے ہر ایک قطع مکانی ہے، پس اگر مسادات  $y = x^2$  یا  $y = x^3$  یا  $y = x^4$  میں لا کا سر مشبہ ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مکانی بالتمام محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے اور جیسے یہ سر تعداداً بڑھتا ہے

یہ مکانی محور ما کے گرد تنگ ہوتا جاتا ہے مثلاً  $۲$  لا کی ترسیم  $۱$  لا کی ترسیم کے بالکل اندر واقع ہوتی ہے اور  $۱$  لا کی ترسیم  $\frac{1}{2}$  لا کی ترسیم کے اندر ہے (۲) فرض کرو کہ  $۱$  منفی ہے، پس اگر  $۱ = -۱$  تو مساوات مفروضہ ہوگی  $۱ = -۱$ ، اس مساوات کا  $۱ = ۱$  لا کے ساتھ مقابلہ کرو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $۱$  لا کی کسی قیمت کے لئے  $۱$  کی چوبیسویں مساواتوں  $۱ = -۱$  سے

حاصل ہوتی ہیں وہ مقدار میں مساوی ہیں لیکن علامت میں مختلف ہیں، اسلئے  $۱ = -۱$  لا کی ترسیم کے معین  $۱ = ۱$  لا کے معینوں کے مساوی ہونگے لیکن محور  $۱$  سے نیچے کی طرف کھینچے جائینگے، پس  $۱ = -۱$  لا کی ترسیم محور  $۱$  میں  $۱ = ۱$  لا کی ترسیم کا عکس ہے اور یہ اس طرح حاصل ہو سکتی ہے  $۱ = ۱$  لا کی ترسیم پر کوئی نقطہ لا اور محور  $۱$  کی دوسری جانب اتنے ہی عمودی فاصلہ پر ایک نقطہ معلوم کرو یعنی محور  $۱$  میں نقطہ کا عکس معلوم کرو۔ ایسے کئی نقطے معلوم ہو سکتے ہیں جنکو ملائے سے  $۱ = -۱$  لا کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

$۱ = ۲$  لا (۱-۲) کی ترسیم  $۱ = ۱$  لا کی ترسیم کے معینوں کو دگنا کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے یا اسے ہم  $۲$  لا کی ترسیم کا محور  $۱$  میں عکس لینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح  $\frac{1}{2}$  لا  $۱ = ۱$  لا کی ترسیم بنائی جاسکتی ہیں۔

شکل بالا میں محور  $۱$  کے نیچے جو منحنی ہیں وہ  $۱ = ۲$  لا  $۱ = \frac{1}{2}$  لا کی ترسیمیں ہیں، ان میں سے ہر ایک قطع مکانی ہے اور چونکہ  $۱$  لا کا ہر صورت میں شفی ہے اس لئے ہر ایک منحنی بالتمام محور  $۱$  سے نیچے

واقع ہوتا ہے۔

بالعموم ترسیموں کو نقطے مرسم کر کے بنایا جاتا ہے لیکن طریقہ بالا سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے کہ  $ا$  کی مختلف مثبت قیمتوں کے لئے  $ا + ا$  کی ترسیمیں عام شکل اور ترکیب میں  $ا = ا$  کی ترسیم کی طرح ہیں اور  $ا$  کی منفی قیمتوں کے لئے یہ  $ا = -ا$  کی ترسیم کی مانند ہیں۔

$ا + ا$  ب کی ترسیم جہاں ب مثبت ہے  $ا + ا$  کی ترسیم سے حاصل ہو سکتی ہے اگر موخر الذکر کے ہر ایک معین کو بقدر ب اکائیوں کے اوپر کی طرف خارج کر دیا جائے، پس  $ا + ا$  ب اور  $ا + ا$  کی ترسیمیں بالکل متماثل ہیں صرف  $ا + ا$  ب کی ترسیم بجا مقام کے ب اکائیوں متقابلہ اوپر واقع ہے۔ اسی طرح  $ا - ا$  ب کی ترسیم وہی ہے جو  $ا - ا$  کی صرف اول الذکر ب اکائیاں نیچے واقع ہے۔

مختصراً  $ا + ا$  کی ترسیم  $ا$  کی مختلف عددی قیمتوں کے لئے قطع مکانی ہے اگر  $ا$  مثبت ہو تو یہ ترسیم بالتمام محور  $ا$  سے اوپر واقع ہوتی ہے اگر  $ا$  منفی ہو تو یہ ترسیم محور  $ا$  سے نیچے واقع ہوتی ہے، جیسے  $ا$  تعداداً بڑھتا ہے یہ ترسیم محور  $ا$  کے گرد زیادہ تنگ ہوتی جاتی ہے اور جیسے  $ا$  گھٹتا ہے یہ ترسیم کشادہ ہوتی جاتی ہے۔

۴۵۔ درجہ دوم کی سب مساداتیں درجات ۴۴، ۴۳، ۴۲ کے عام ترسیموں طریق سے حل ہو سکتی ہیں، لیکن اگر ایسی مساداتوں کو اُس طریقہ سے حل کیا جائے جو ہمزاد مساداتوں کے لئے استعمال کیا جاتا ہے تو حل میں ذرا سہولت ہوتی ہے۔

مسادات درجہ دوم  $ا + ا + ب + ج = ۰$  ..... (۱)

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ  $ا = لا$  ..... (۲)

مساوات (۱) میں  $لا$  کے لئے  $ا$  مندرج کرنے سے

$$ا + ا + ب + لا + ج = ۰ \quad (۳)$$

ہیں اگر مساواتوں  $ا = لا$  { (۲) کو ایک ساتھ بطور  
 $ا + ا + ب + لا + ج = ۰$  (۳)

متجانس مساواتوں کے ترکیبی طریق پر حل کیا جائے اور اس طرح  $لا$   
 کی قیمت یا قیمتیں معلوم کی جائیں تو یہ قیمتیں مساوات (۱) کی اصلیں  
 ہوں گی۔

اب نظام  $ا = لا$  {  
 $ا + ا + ب + لا + ج = ۰$  کو ترکیبی طریق پر حل کرنے

سے یہ مراد ہے کہ ہم  $ا = لا$  اور  $ا + ا + ب + لا + ج = ۰$  کی انگ انگ  
 ترکیبیں بنائیں اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہوں ان نقاط کے  
 فضلے یعنی  $لا$  کی قیمتیں معلوم کریں، یہ فضلے مساوات مفروضہ  
 $ا + ا + ب + لا + ج = ۰$  کی اصلیں ہوں گی۔

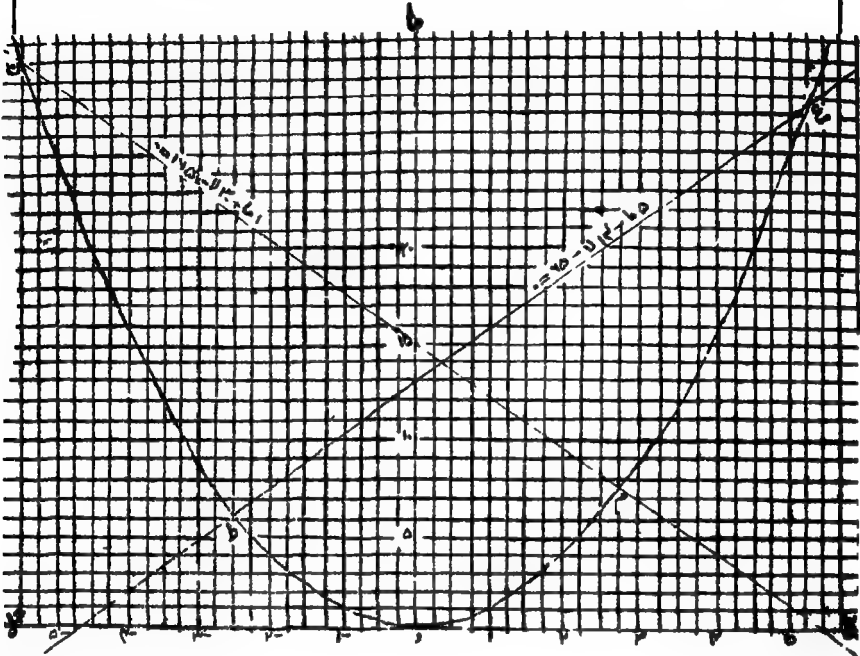
اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں  
 $ا = لا$  کی دہری ترکیب ہمیشہ استعمال ہو سکتی ہے صرف ہر صورت میں ہمیں خطی  
 مساوات  $ا + ا + ب + لا + ج = ۰$  کی ترکیب بنانا پڑتی ہے جو ہم جانتے ہیں کہ  
 متقابلہ آسانی بن سکتی ہے۔

ذیل کی مثالوں سے اس طریقہ کی بخوبی توضیح ہو گی۔

مثال ۱۔ مساوات  $ا + لا + ۳۰ - ۱۶۵ = ۰$  کو حل کرو۔

فرض کرو کہ  $\lambda = 0$  ..... (۳)

مفروضہ مساوات میں یہ مندرج کرنے سے  $11\lambda + 3\lambda - 145 = 0$  ..... (۳)



$\lambda = 1$  کی ترسیم حسب سابق (دفعہ ۴) بناؤ، پیمانہ محور  $\lambda$  پر  $1 = 25$

اور محور  $\lambda$  پر  $1 = 10$

اسی پیمانہ کے مطابق  $11\lambda + 3\lambda - 145 = 0$  کی ترسیم بناؤ، اس میں

اگر  $\lambda = 0$  تو  $15 = 0$

اور اگر  $\lambda = 0$  تو  $15 = 0$

پس نقاط  $(0, 15)$  اور  $(5, 0)$  کو لانے والا مستقیم خط (۳) کی

ترسیم ہے جو  $\lambda = 0$  کی ترسیم کو نقاط  $m$  اور  $n$  پر قطع کرتی ہے،  $m$  اور  $n$

کے فصلوں کو ناپنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $\lambda = 25$  یا  $\lambda = 5$



مساوات ۱۱ لا + ۳۰ = ۱۶۵ کی اصلیں ہیں۔

مثال ۲۔ ۵ لا - ۱۴ = ۶۵۔ کو حل کرو

فرض کرو کہ لا = ۱ ..... (۱)

تب ۵ - ۱۴ = ۶۵ ..... (۲)

(۱) کی ترسیم شکل بالا میں موجود ہے

(۲) کی ترسیم پر دو نقطے (۱۳۱۰) اور (۲۷۵) واقع ہوتے ہیں،

ان کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے (۲) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے جو مکانی کو ع اور ط پر قطع کرتی ہے، پس ع اور ط کے فاصلے ناپنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵۳ یا ۲۵۵ جو مساوات کی اصلیں ہیں

۴۴ واثرہ مثال ۱۔ مساوات لا + ۱ = ۳۶ کی ترسیم یہ دو متعادیر مجہول لا، ۱ کی ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس کو ہم

اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں لا = ۳۶ - ۱

اس مساوات کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل ۳۶ - لا کی لا، ۱

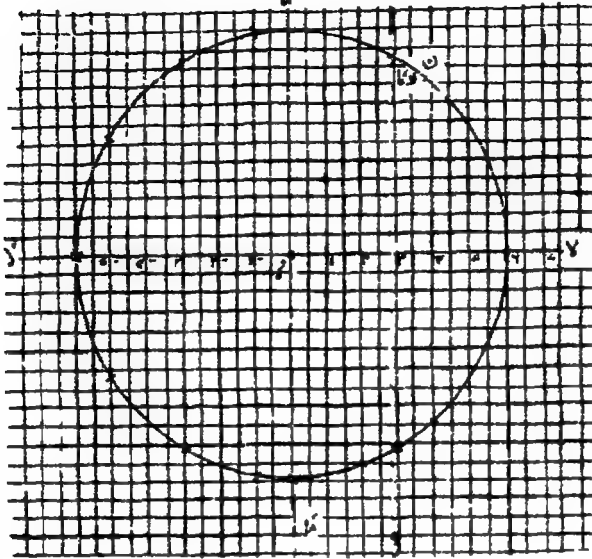
کی متناظر قیمتوں سے جدول ذیل مرتب کرو۔

لا	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲۹	۲۹	۳۶	۴۵	۵۳	۶۱	۶۹	۷۷	۸۵	۹۳	۱۰۱	۱۰۹	۱۱۷	۱۲۵	۱۳۳	۱۴۱
۳۶	۱۳	۰	۱۱	۲۷	۴۲	۵۶	۶۹	۸۱	۹۲	۱۰۲	۱۱۲	۱۲۲	۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲
۳۶	۱۳	۰	۱۱	۲۷	۴۲	۵۶	۶۹	۸۱	۹۲	۱۰۲	۱۱۲	۱۲۲	۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲

ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی ہر ایک قیمت کے لئے لا کی دو متناظر قیمتیں ہیں۔ جو تعداداً ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں مثلاً

اگر  $x^2 - 5x + 6 = 0$  یا  $x^2 + 3x - 4 = 0$

اور اگر  $x^2 - 5x + 6 = 0$  تو  $x = 2$  یا  $x = 3$  وغیرہ وغیرہ



چونکہ  
لا کی کسی  
ایک قیمت  
کے لئے  
ما کی دو  
قیمتیں  
ہیں جو  
مساوی  
اور مختلف

العلامت ہیں اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تریسیم محور لا کے گرد متشاکل ہے  
اسی طرح مساوات کو اس شکل  $x^2 - 5x + 6 = 0$  میں رکھنے سے ہم دیکھتے  
ہیں کہ تریسیم محور ما کے گرد متشاکل ہے۔

نیز اگر  $x^2 - 5x + 6 = 0$  تو  $x = 2$  یا  $x = 3$  جو خیالی مقداریں ہیں، چونکہ ہم  
 $x^2 - 5x + 6 = 0$  کا تقریبی جذر بھی نہیں نکال سکتے اسلئے لا کی قیمت  $x = 2$   
کے جواب میں ہیں، ما کی حقیقی قیمتیں نہیں ملتی جبکہ مرسم کرنے سے ہم  
منحنی پر ایک نقطہ معلوم کر سکیں، فی الحقیقت اگر لا تعداداً  $x = 2$  سے بڑا بھی  
بڑا ہو تو ما کی قیمتیں خیالی ہونگی، اسی طرح اگر ما تعداداً  $x = 3$  سے بڑا ہو تو  
لا کی قیمتیں خیالی ہونگی۔ پس معلوم ہوا کہ لا یا ما کی بڑی سے بڑی  
قیمت  $x = 2$  ہو سکتی ہے، اسلئے منحنی با تمام خطوط  $x = 2$  یا  $x = 3$

اور  $ما = ۶ + ۶ = ۱۲$  کے اندر واقع ہوتا ہے۔

اگر جدول کے سب نقاط کو حسب معمول مرتب کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ یہ ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز مبدا ہے اور جس کا نصف قطر ۶ ہے۔

دفعہ ۹ میں ہم نے دو نقاط کا باہمی فاصلہ ان نقاط کے محدودوں کی رقوم میں معلوم کیا، مثلاً اگر دو نقاط ۱ اور ۲ کے محدود بالترتیب (۱، ۱) اور (۱، ۱) ہوں تو ۱ اور ۲ کے درمیانی فاصلہ کا مربع  
یعنی  $۱ب^۲ = (۱ - ۱)^۲ + (۱ - ۱)^۲$

یعنی  $۱ب = \sqrt{(۱ - ۱)^۲ + (۱ - ۱)^۲}$

اب فرض کرو کہ اس مثال کے دائرہ کے محیط پر کوئی عام نقطہ ن (۱، ۱) ہے، مبدا کے محدود (۰، ۰) ہیں اسلئے  
ون  $۲ = (۱ - ۰)^۲ + (۱ - ۰)^۲ = ۲$  کیونکہ ن خواہ محیط پر کہیں واقع ہو اس کا فاصلہ مرکز سے ہمیشہ ۶ ہوگا،

اسلئے دائرہ مذکور کی مساوات  $۱۲ + ۱۲ = ۳۶$  ہے۔

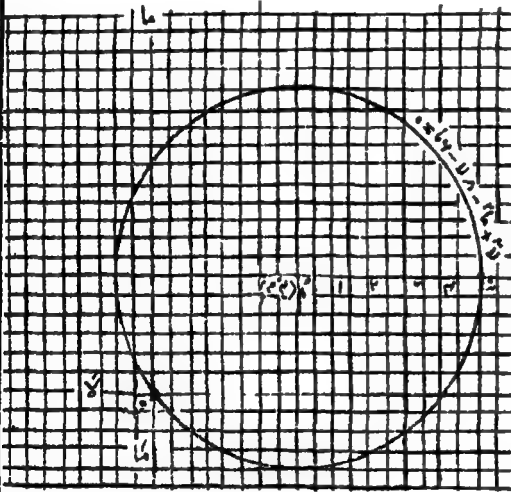
مثال ۲۔  $۱۲ + ۱۲ = ۳۶$  کی ترتیب بناؤ  
اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$(۱۲ + ۱۲) + (۱۲ + ۱۲) = ۳۶ \quad (\text{طرفین پر } ۲۵)$$

زیادہ کرنے سے)

$$۲۵ = ۲(۱۲ - ۱۲) + ۲(۱۲ - ۱۲)$$

لا	۰	۴	۵	۹	۱-	$\frac{1}{4}-$
۴-لا	۴-	۰	۱	۵	۵-	$۴\frac{1}{4}-$
(۴-لا)²	۱۶	۰	۱	۲۵	۲۵	$۲۰\frac{1}{۴}$
۲(۴-لا)	۹	۲۵	۲۴	۰	۰	$۴\frac{۳}{۴}$
۳-۶	۳±	۵±	۴۸±	۰	۰	$۲\frac{1}{۴}±$
۶	۶-۲	۲-۶	۸-۶	۳	۳	$\frac{۳}{۴}۵\frac{1}{۴}$



اوپر کے دس نقاط کو مرتبہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز (۴، ۴) ہے اور نصف قطر ۵ ہے۔  
 مبداء و بھی اس دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے۔  
 یہ ہم ابتدا میں ہی مساوات سے دیکھ سکتے تھے کیونکہ

مبداء کے محدود (ب۔) مساوات مفروضہ کو پورا کرتے ہیں۔  
 م۔۴۔ اب ہم درجہ دوم کی ہمزاد مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرنے کی ایک دوسادہ مثالیں درج کرتے ہیں، ترتیبی طریق پر سب ہمزاد مساواتیں قریب قریب ایک ہی طرح سے حل ہوتی ہیں۔  
 ان مساواتوں کی ہم الگ الگ ترتیبیں بناتے ہیں اور ان کے نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرو۔

(۱) .....  $25 = 4 + م$

(۲) .....  $1 = م - ۱$

ان مساواتوں کو اس طرح لکھو

(۱) .....  $م = 25 - 4$

(۲) .....  $م = 1 + ۱$

اب مطلوب یہ ہے کہ ہم  $4 + م$  کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو (۱) اور

(۲) دونوں کو پورا کریں۔ پس ہمیں  $م = 25 - 4$  اور  $م = 1 + ۱$

کی ترتیبیں بنا کر ان کے نقاط تقاطع معلوم کرنے چاہئیں۔

$م = 25 - 4$  کی ترتیم

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

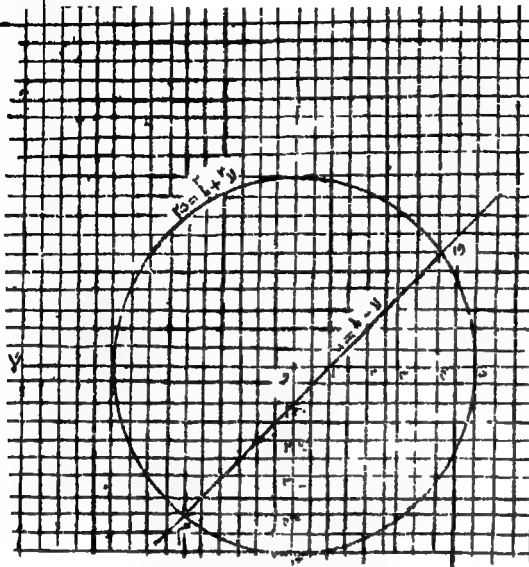
ان نقاط کو مرتب کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $م = 25 - 4$  کی ترتیم ایک محیط  
دائرہ ہے جبکہ مرکز مبداء ہے اور نصف قطر ۵۔

اب اس شکل میں اسی پیمانہ پر ہم  $م = 1 + ۱$  کی ترتیم بناتے ہیں

$م = 1 + ۱$  کی ترتیم

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

ان نقاط کو مرتب کرنے سے  $م = 1 + ۱$  کی ترتیم بنائی گئی ہے جو ایک مستقیم



خط ہے۔  
 دائرہ اور یہ خط  
 مستقیم ایک دوسرے  
 کو نقاط م اور ن  
 پر قطع کرتے ہیں جن کے  
 محدود بالترتیب (۳، ۴)  
 اور (۳-، ۴-) ہیں  
 اور چونکہ یہ نقطے دونوں  
 تریبیوں پر ہیں اس لیے

یہ دونوں مساواتوں کو پورا کرتے ہیں۔

تصدیق - {  $\begin{matrix} ۳ = ۳ \\ ۴ = ۴ \end{matrix}$  } کو مساواتوں میں مندرجہ کرنے سے

$$(۱) \quad ۲۵ = ۳ + ۲۲ = ۲ + ۲۳$$

$$۱ = ۳ - ۲ = ۱ - ۱$$

$$۲۵ = ۱۶ + ۹ = ۴(۴-) + ۲(۳-) = ۲ + ۲۳ \quad \left\{ \begin{matrix} ۳ = ۳ \\ ۴ = ۴ \end{matrix} \right.$$

دیگر وغیرہ:  $۱ = (۴-) - ۳ = ۱ - ۱$

پس یہ حل درست ہیں۔

مثال ۲ - ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو تریبی طریق پر حل کرو۔

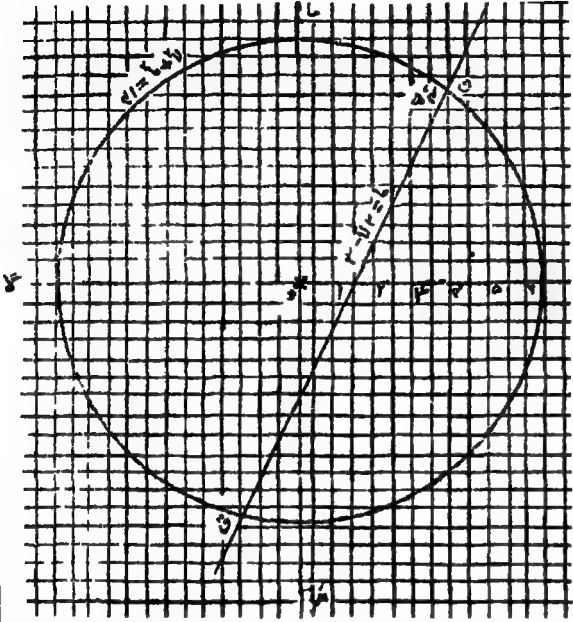
$$(۱) \quad ۲ + ۲۳ = ۴۱ \dots (۱) \quad \text{اور} \quad ۲ + ۲۳ = ۴۱ \dots (۲)$$

(۱) کی تریسیم ایک دائرہ کا محیط ہے جس کا مرکز مبداء ہے اور نصف قطر

$$۶۵۴۰۳ = ۴۱ \quad \text{اور} \quad ۳ = ۳ \quad \text{اور} \quad ۵ = ۵ \quad \text{نقطہ ن}$$

مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے، اس لیے یہ دائرہ مذکور کے محیط پر واقع ہے،

پس اگر ہم مبدأ کو مرکز اور ون کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں تو اس کا محیط ترسیم مطلوبہ ہوگی۔



(۲) کی ترسیم ایک

مستقیم خط ہے جو محور

کو نقاط (۵، ۱۰) اور (۳، ۱۰) پر

قطع کرتی ہے، یہ خط

دائرہ کو نقاط ن اور

ق پر قطع کرتا ہے

اور ان نقطوں کے

محدوباً ترتیب (۴، ۵)

اور (۶، ۱۵) - (۶، ۲۵)

ہیں، پس ہمزاد مسادات

(۱) اور (۲) کے حل حسب ذیل ہیں۔

$$لا = ۳، ما = ۵ اور لا = ۱۵، ما = ۶۵۲$$

## امثلہ نمبری ۱۱

۱۔ ہر صورت میں مناسب پیمانہ کا انتخاب کر کے

۸ لا، ۱۶ لا، ۵ لا، ۳ لا کی ترسیمیں بناؤ اور دکھاؤ کہ سب

ترسیمیں مبدأ پر محور کا کوس کر رہی ہیں۔

۲۔ ما = لا اور لا = ما کی ترسیمیں بناؤ اور دکھاؤ کہ ان کا صرف

ایک مشترک وتر ہے، اس کی مساوات معلوم کرو۔

$$۳ - (۱) \quad ۴ - ۲ = ۲ \quad (۲) \quad ۲ + ۲ = ۴ \quad (۳) \quad ۲ - ۲ = ۰$$

$$(۴) \quad ۲ = ۲ + ۲ - ۲ \quad \text{کی ترسیں بناؤ}$$

ذیل کی مساواتوں کو ترسیبی طریق پر حل کرو

$$۴ - ۲ = ۲ - ۲ = ۰ \quad ۵ - ۲ + ۳ = ۱۰ - ۲ = ۸$$

$$۶ - ۲ = ۲۰ + ۲ = ۲۲ \quad ۷ - ۲ + ۳ = ۵ - ۲ = ۳$$

$$۸ - ۲ = ۲۰ - ۲ + ۳ = ۲۱ \quad ۹ - ۲ + ۳ = ۲۴ - ۲ = ۲۲$$

$$۱۰ - ۲ = ۶۵ - ۲ = ۶۳ \quad ۱۱ - ۲ + ۳ = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

$$۱۲ - ۲ = ۱۵ + ۳ = ۱۸ \quad ۱۳ - ۲ = ۱۵ - ۲ = ۱۳$$

۱۴ - ذیل کے جلات کی ترسیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو

$$(۱) \quad ۴ - ۲ + ۳ = ۵$$

$$(۲) \quad ۳ - ۲ + ۳ = ۴$$

$$(۳) \quad ۲ - ۲ + ۳ = ۲۲$$

۱۵ - ذیل کے جلات کی ترسیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ۴ - ۲ = ۲$$

$$(۲) \quad ۵ + ۳ - ۲ = ۶$$

$$(۳) \quad ۵ + ۳ - ۲ = ۶$$

۱۶ - ترسیبی طریق پر ثابت کرو کہ متفاعل  $۲ - ۲ + ۳$ ،  $۸$  کی اُن تمام قیمتوں کے لئے منفی ہے جو  $-۲$  اور  $۴$  کے درمیان واقع ہوتی



ہیں لیکن ان حدود کے باہر لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ مثبت ہے،  
۱۷۔ ذیل کی مساداتوں کو تریبی طریق پر حل کرو

$$۱۰۰ = ۶ + ۶$$

$$۱۴ = ۶ + ۸ \quad (۱)$$

$$۳۶ = ۶ + ۶$$

$$۱۲ = ۶ + ۶ \quad (۲)$$

$$۳۴ = ۶ + ۶$$

$$۱۱ = ۶ + ۵ \quad (۳)$$

## جوابات

سوالات کے ترسیی حل میں خواہ کتنی ہی احتیاط اور صحت سے کام لیا جائے نتائج محض تقریبی حاصل ہوں گے، جوابات ذیل نظری طریق پر حساب لگانے سے حاصل کئے گئے ہیں اور ان کی بناء پر طالب علم اپنے نتائج، شکل اور پیمائش کی جانچ کر سکتا ہے۔

### امثلہ نمبری ۱ صفحہ ۷

- ۱۔ اکائی سنتی میٹر، ع ج = ۲، ر ع = ۲۵۵
- د ع = ۱۲، ر د = ۱۵، د ب = ۱۹، د ج = ۳۲
- ۲۔ اکائی سنتی میٹر، ل = ۲۶، ل م = ۲۵۵، م ج = ۲۶
- س = ۲۵، ج = ۲۵، ر ل = ۱۵
- ۳۔ ۵۱ + ۵۱ - ۵۱ + ۵۱ = ۳۵۴
- تمام مسافت کے بعد وہ اپنی سمت روانگی میں - ۳ واپس چلا۔

### امثلہ نمبری ۲ صفحہ ۳

- ۱۔ (۱) ا د = ۱، ن (۵، ۷)، ن (۸، ۱۰)، ن (۱۰، ۱۰)

نہ (۴۵-۳) نہ (۹۰-۰) نہ (۱۱-۱۱) نہ (۷۰-۷)

نہ (۲۰-۴) نہ (۱۱-۱۰)

(ب) ا = ۱ نہ (۱۵، ۱۷) نہ (۸، ۰) نہ (۹۰، ۱)

نہ (۵۰، ۳۵) نہ (۹۰-۰) نہ (۱۰-۱۱) نہ (۷۰-۷)

نہ (۲۰-۴) نہ (۱۱-۱۰)

(ج) ۱۵ = ۱ نہ (۱۳، ۱) نہ (۱۶، ۰) نہ (۸۰، ۱)

نہ (۱۸، ۱) نہ (۸، ۰) نہ (۲۲-۲۲) نہ (۳۰-۳۰)

نہ (۳۰-۳) نہ (۲۲-۲)

۲- (۷۰-۷) (۹۰-۰) (۸۰-۰) (۷۰-۷) (۱۱-۱۰)

(۲۰-۴) (۷۰-۷) (۳۰-۳) (۸۰-۰)

۳- (۷۰-۷) (۵۰-۳) (۸۰-۰) (۹۰-۰) (۱۱-۱۰) (۷۰-۷)

(۸۰-۰) (۲۰-۴) (۱۱-۱۰) (۹۰-۰) (۷۰-۷) (۱۱-۱۰)

۷- (۱) یہ خط محور کا سے نقطہ (۰، ۲) پر اور محور ما سے (۱۱، ۱)

پر ملتا ہے، ظاہر ہے کہ یہ خط قریب قریب مبداء میں سے گذرتا ہے۔

(ب) یہ خط محور کا سے نقطہ (۰، ۵) پر اور محور ما سے

(۰، ۱۰) پر ملتا ہے۔

(ج) محور کا سے نقطہ (۰، ۵) پر اور محور ما سے

(۰، ۸) پر

۸- (۱) اضلاع کے طول ۳ اینچ، ۹ اینچ، رقبہ ۲۷ مربع

اینچ







۱۰۔ ۲ گھنٹے میں ۱۱۔ ایک گھنٹہ کے بعد، مقام روانگی سے ۶ میل

کے فاصلہ پر

۱۲۔ ۱ بجکر ۱۵ منٹ کے بعد، مقام روانگی سے  $\frac{1}{4}$  ۱۱ میل پر  
 ۱۳۔ ۱ بجکر ۳۵ منٹ ۴۵ سکند، مقام روانگی سے تقریباً ۸ میل کے فاصلہ پر  
 ۱۴۔ ۱۶ دفعہ ہر  $\frac{1}{4}$  ۱۳ منٹ کے بعد، گزشتہ مقام ملاقات سے  
 $\frac{2}{3}$  ۵۸۶ گز کے فاصلہ پر

۱۶۔ (۱) ۷ بجکر ۵۴۵ منٹ پر، ۷ بجکر ۳۲۵، ۷ منٹ اور  
 ۳۲۵ منٹ کے بعد

۱۷۔ ۵۴۵ منٹ، ۱۰۹۰ منٹ، ۵۵ ر واں حصہ  
 ۱۸۔ دوسری نالی کھولنے کے ۸ گھنٹہ اور ۲ گھنٹہ بعد  
 بالترتیب

۱۹۔ ۲۵۶ گھنٹے میں ۲۰۔ ۵۶۰۸ دن

۲۱۔ ۱۵۹ دن میں ۲۲۔ ۸۷۵ روپیہ

۲۳۔ ۹۶ روپیہ ۲۴۔ نسبت ۱:۲ سے

۲۵۔ ۸۷، ۵۵، ۴۸ ۲۶۔ ۱۳ پونڈ

۲۷۔ ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴ اور ۳۰۶۳ کلو گرام

۲۸۔ ۴۶۹، ۸۸۷

۲۹۔ ۸۱۷، ۱۹۱، ۳۲ ۳۰۔ ۲۵۵

۳۱۔ ۳۱۴، ۳۱۴، ۳۱۴ اور ۲۰۰، ۲۱۵

۳۲۔ ۳۰۲، ۳۰۲، ۳۰۲ تقریباً

۳۵۔ ۴۴۵، ۲۹۵۶

۳۶- ق = ۱۵۵ ا ب + ۲۴۵ = ۱۵

۳۷- ۱۸۲ پونڈ

### امثلہ نمبری ۷ صفحہ ۱۴۸

۷- آخری دو سالوں کے اوسط کی بنا پر ۳ سال کے بعد  
۱۲ سال کے بعد

۸- ۱ سال ۳ سال کے اندر

۱۲- ۵۷۹ لاکھ، ۱۳۶ لاکھ، پہلا منحنی، ۱۳۱ میں، ۸۹ لاکھ

۱۴- (۱) انگلستان، ۱۹۲، ۲۷۵، ۵۲۸، ۳۴۶

سکاٹ لینڈ ۲۹، ۳۹، ۳۹

آئر لینڈ ۶۰، ۶۰، ۶۰

(۲) ۱۹۰۱ میں آبادیاں مساوی ہوں گی

(۳) ۱۹۲۳ میں آبادی ڈیوڈی ہو جائے گی ۱۹۲۱ میں اور

دوچند ہو جائے گی ۱۹۳۹ میں

۱۵- ۱۳۱۵، ۲۶۱۲۵، ۳۳۱۹۲۵، ۳۹۳۷۵ روپیہ تقریباً

۲۷۴ بیچ

۱۶- ۹ روپیہ ۹ آنہ ۶ پائی، ۱۲ روپیہ ۱۳ آنہ ۶ پائی

۱۶ روپیہ ۱۰ آنہ ۶ پائی

۲۰۳، ۳۶، ۶۱۵ پائینٹ

۱۷- ۳۷ روپیہ ۸ آنہ ۴ روپیہ ۱۳ آنہ ۴ پائی، ۵۲ روپیہ ۸ آنہ

۵۸ روپیہ ۵ آنہ ۴ پائی



۱۲۵، ۲۰۳۳ انچ لمبے

۱۸-۲۲، ۳۶، ۴۰، ۵۶ روپیہ

۱۹-۲۵۳، ۶۲۲۶، ۱۴۷ پونڈ

۲۰-۲۹۵۴، ۴۳۲۴، ۳۸۵۶۵، ۲۸۵۶۵ سال

۲۱-۱۷۸۲ تقریباً ۶۳ اور ۱۵۵-۲۲

۲۳-۱۶۴، ۳۸۸۳ فٹ تقریباً ۲۴-۲۹۵۹۸، ۲۹۵۹۳

۲۹۵۹۲

۲۵-۴۰ سنتی گریڈ پر حجم ۵ مکعب سنتی میٹر اور ۲۰ مکعب انچ

حجم پر تپش ۹۴ سنتی گریڈ

۲۷-۱۵۶، ۱۹ مکعب فٹ، ۲۶۷ پونڈ

امثلہ نمبری ۸ صفحہ ۱۶۸

۱-۲، ۲-۱۰۲، ۳-۱، ۴-۳، ۵-۲

۵-۱۰۲، ۶-۱۰۲، ۷-۱۰۲، ۸-۱۰۲، ۹-۱۰۲

۱۰-۱۰۲، ۱۱-۱۰۲، ۱۲-۱۰۲، ۱۳-۱۰۲، ۱۴-۱۰۲

۱۵-۱۰۲، ۱۶-۱۰۲، ۱۷-۱۰۲، ۱۸-۱۰۲، ۱۹-۱۰۲

۲۰-۱۰۲، ۲۱-۱۰۲، ۲۲-۱۰۲، ۲۳-۱۰۲، ۲۴-۱۰۲

۲۵-۱۰۲، ۲۶-۱۰۲، ۲۷-۱۰۲، ۲۸-۱۰۲، ۲۹-۱۰۲

۳۰-۱۰۲، ۳۱-۱۰۲، ۳۲-۱۰۲، ۳۳-۱۰۲، ۳۴-۱۰۲

۳۵-۱۰۲، ۳۶-۱۰۲، ۳۷-۱۰۲، ۳۸-۱۰۲، ۳۹-۱۰۲

۴۰-۱۰۲، ۴۱-۱۰۲، ۴۲-۱۰۲، ۴۳-۱۰۲، ۴۴-۱۰۲

$$\begin{array}{ll}
 ۲۳ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲۳ & ۲۴ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲۴ \\
 ۲۵ - ۵ - ۶ = ۵ - \frac{۶}{۵} = ۵ - ۲۶ & ۲۶ - ۵ - ۶ = ۵ - \frac{۶}{۵} = ۵ - ۲۶ \\
 ۲۷ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲۸ & ۲۸ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲۸ \\
 ۲۹ - ۱ - ۳ = ۱ - \frac{۳}{۲} = ۱ - ۳۰ & ۳۰ - ۱ - ۳ = ۱ - \frac{۳}{۲} = ۱ - ۳۰ \\
 ۳۱ - ۳ - \frac{۵}{۵} = ۳ - \frac{۵}{۵} = ۳ - ۳۲ & ۳۲ - ۳ - \frac{۵}{۵} = ۳ - \frac{۵}{۵} = ۳ - ۳۲ \\
 ۳۳ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۳۴ & ۳۴ - ۱ - ۲ = ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۳۴ \\
 ۳۵ - ۲ - ۱۵ = ۲ - \frac{۱۵}{۲} = ۲ - ۳۶ & ۳۶ - ۲ - ۱۵ = ۲ - \frac{۱۵}{۲} = ۲ - ۳۶ \\
 ۳۷ - ۱۳ - ۱۲ = ۱۳ - \frac{۱۲}{۱۳} = ۱۳ - ۳۸ & ۳۸ - ۱۳ - ۱۲ = ۱۳ - \frac{۱۲}{۱۳} = ۱۳ - ۳۸
 \end{array}$$

### امثلة نمبری و صفحہ ۱۸۲

$$\begin{array}{lll}
 ۱ - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲۳ & ۲ - \frac{۱}{۲} = ۲ - ۲۴ & ۳ - \frac{۱}{۲} = ۳ - ۲۵ \\
 ۴ - \frac{۲}{۳} = ۴ - ۲۶ & ۵ - \frac{۱}{۲} = ۵ - ۲۷ & ۶ - \frac{۲}{۳} = ۶ - ۲۸ \\
 ۷ - \frac{۱}{۲} = ۷ - ۲۹ & ۸ - \frac{۲}{۳} = ۸ - ۳۰ & ۹ - \frac{۱}{۲} = ۹ - ۳۱ \\
 ۱۰ - \frac{۲}{۳} = ۱۰ - ۳۲ & ۱۱ - \frac{۱}{۲} = ۱۱ - ۳۳ & ۱۲ - \frac{۲}{۳} = ۱۲ - ۳۴ \\
 ۱۳ - \frac{۱}{۲} = ۱۳ - ۳۵ & ۱۴ - \frac{۲}{۳} = ۱۴ - ۳۶ & ۱۵ - \frac{۱}{۲} = ۱۵ - ۳۷ \\
 ۱۶ - \frac{۲}{۳} = ۱۶ - ۳۸ & ۱۷ - \frac{۱}{۲} = ۱۷ - ۳۹ & ۱۸ - \frac{۲}{۳} = ۱۸ - ۴۰ \\
 ۱۹ - \frac{۱}{۲} = ۱۹ - ۴۱ & ۲۰ - \frac{۲}{۳} = ۲۰ - ۴۲ & ۲۱ - \frac{۱}{۲} = ۲۱ - ۴۳ \\
 ۲۲ - \frac{۲}{۳} = ۲۲ - ۴۴ & ۲۳ - \frac{۱}{۲} = ۲۳ - ۴۵ & ۲۴ - \frac{۲}{۳} = ۲۴ - ۴۶ \\
 ۲۵ - \frac{۱}{۲} = ۲۵ - ۴۷ & ۲۶ - \frac{۲}{۳} = ۲۶ - ۴۸ & ۲۷ - \frac{۱}{۲} = ۲۷ - ۴۹ \\
 ۲۸ - \frac{۲}{۳} = ۲۸ - ۵۰ & ۲۹ - \frac{۱}{۲} = ۲۹ - ۵۱ & ۳۰ - \frac{۲}{۳} = ۳۰ - ۵۲
 \end{array}$$





تَبَيَّنَ

# فہرست اصطلاحات

Abscissa	فصلہ
Absolute term	رقم مطلق
Broken(graph)	شکستہ (ترسیم)
Continuous(graph)	مسل (ترسیم)
Coordinate	محدد
Dependent(variable)	تابع (متغیر)
Function	تفاعل
Graph	ترسیم
Independent(variable)	متبوع (متغیر)
Linear	خطی
Ordinate	معیّن
Plotting	نشان دہی کرنا، مرتسم کرنا
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Ready reckoner	حاضر شمار
Reduction graphs	تحویلی ترسیمیں
Variable	متغیر
Vector	سستی



# غلط امسا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۸	۱۶	دے	دے	۱۴۰	۲	میعوں	معیوں
۳۰	۱۶	۲	۱	۱۵۵	۱۶	وٹی کر الما تک	وٹی کر الما تک
۹۲	۱۹	ما	ما	۹۵، ۹۶	۱۵	۹۵، ۹۶	۹۵، ۹۶
۹۰	۱۸	۵	۳	جدول میں دی	۷	جدول دی	جدول میں دی
۱۰۱	۱۱	فیصل	فیصل	صورت ہے	۲۱	صورت	صورت ہے
۱۱۵	۱۹	۱-۸	۱۰-۸	لا = ۲ =	۷	لا = ۲ =	لا = ۲ =
۱۲۵	۱۱	ایکج	ایکج	یا	۱۳	یا	یا
۱۲۵	۲۰	تحویل	تحویل	لا ±	۵	لا ±	لا ±
۱۲۹	۸	قریب	قریب	=	۱	=	=
۱۲۹	۲۰	طبعی	طبعی	کا	۱۶	کا	کا
۱۳۶	۳	آبادی	آبادی	متناظر	۱۰	متناظر	متناظر
۱۳۶	۴	کھینچے	کھینچے	ے	۴	ے	ے